

DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 1

SECTIONS : 4^{ème} Sciences Expérimentales
 EPREUVE : Mathématiques
 DUREE : 2 heures

Exercice 1 : (3 pts)

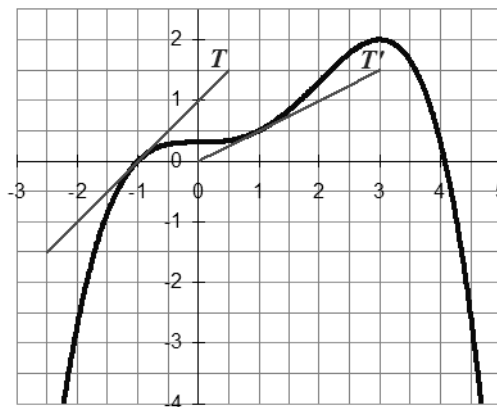
Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis **justifier cette réponse**.

Une réponse non justifiée est considérée comme fautive.

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R}

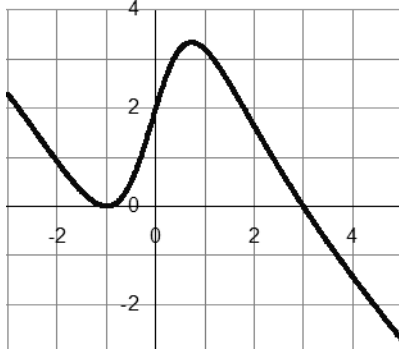
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	2	$-\infty$

- 1) L'équation $f(x) = 0$ admet :
 - A. une solution
 - B. deux solutions
 - C. trois solutions
- 2) On note f' la dérivée de la fonction f . On peut affirmer que :
 - A. $f'(-2) \times f'(1) \leq 0$
 - B. $f'(2) \times f'(5) \geq 0$
 - C. $f'(4) \times f'(7) \geq 0$
- 3) On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction. Les droites T et T' sont tangentes à la courbe aux points d'abscisses respectives -1 et 1

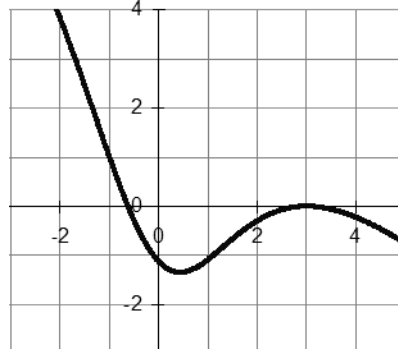


- A. $f'(-1) = 0$
 - B. $f'(-1) = 2 \times f'(1)$
 - C. $f'(1) = 2 \times f'(-1)$
- 4) Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.

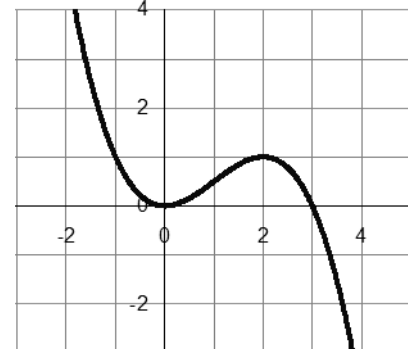
A. courbe C_1



B. courbe C_2



C. courbe C_3



Exercice 2 : (5 pts)

On définit les suites (U) et (V) par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

On pose $W_n = V_n - U_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Démontrer que la suite (W) est géométrique et préciser sa limite
- 2) Exprimer W_n en fonction de n et en déduire que $U_n \leq V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 3) Exprimer $U_{n+1} - U_n$ et $V_{n+1} - V_n$ en fonction de W_n
En déduire le sens de variation des suites (U) et (V)
- 4) Justifier que (U) et (V) convergent vers la même limite ℓ .
- 5) On pose $T_n = 3U_n + 10V_n$, pour $n \in \mathbb{N}$
 - a) Démontrer que la suite (T_n) est constante.
 - b) En déduire la valeur de ℓ .

Exercice 3 : (6 pts)

On considère l'équation $(E) : 2z^2 - 4z + 3 - i\sqrt{3} = 0$

- 1) Calculer $(1 + i\sqrt{3})^2$
- 2) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)
b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.
- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et C d'affixes respectives $\alpha = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$
 - a) Montrer que OAC est un triangle rectangle
 - b) Déterminer l'affixe du point B tel que $OABC$ soit un rectangle
- 4) Soit l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$; avec $\theta \in]0, \pi[$
 - a) Montrer que : $2i \sin \theta e^{i\theta} = e^{2i\theta} - 1$
 - b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) . On désignera par z' la solution ayant une partie imaginaire négative et par z'' l'autre solution
 - c) Déterminer θ pour que l'on ait $z' = \alpha$ et $z'' = \beta$

Exercice 4 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x}}$ et ζ_f sa courbe dans un repère orthonormé

(O, \vec{i}, \vec{j})

- 1) a) Etudier les variations de f
b) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
c) Explicité $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.
d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$.
- 2) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
- 3) Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
 - a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$
 - c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite qu'on précisera.

Solution

Solution-Exercice 1

1) B

f est strictement croissante sur $]-\infty, 3]$ et $f(]-\infty, 3]) =]-\infty, 2]$ qui contient 0

D'autre part f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$ et $f([3, +\infty[) =]-\infty, 2]$ qui contient 0

Donc $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions : -1 et une autre qui appartient à $[3, +\infty[$ (**0, 75 pt**)

2) C

f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$ donc $f'(x) < 0$ pour tout $x \in [3, +\infty[$ en particulier

$f'(4) < 0$ et $f'(7) < 0$ donc $f'(4) \times f'(7) \geq 0$ (**0, 75 pt**)

3) B

Graphiquement : $f'(-1) = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$ donc $f'(-1) = 2f'(1)$ (**0, 75 pt**)

4) C

Sur $]-\infty, 3]$, f est strictement croissante donc $f'(x) > 0$ et par suite la courbe de f' est au dessus de l'axe des abscisses

Sur $[3, +\infty[$, f est strictement décroissante donc $f'(x) < 0$ et par suite la courbe de f' est en dessous de l'axe des abscisses (donc la courbe C_2 est à écarter)

D'autre part $f'(-1) = 1$ donc la courbe de f' passe par le point de coordonnées $(-1, 1)$ qui est le cas de la courbe C_3 (**0, 75 pt**)

Solution-Exercice 2

1) $W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} - \frac{U_n + 2V_n}{3} = \frac{3U_n + 12V_n - 5U_n - 10V_n}{15} = \frac{2V_n - 2U_n}{15} = \frac{2}{15}(V_n - U_n) = \frac{2}{15}W_n$

Donc W_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{15}$ (**0, 75 pt**)

$q = \frac{2}{15} \in]-1, 1[$ donc $\lim W_n = 0$ (**0, 25 pt**)

2) $W_n = W_0 q^n$ or $W_0 = V_0 - U_0 = 1$ donc $W_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n$ (**0, 5 pt**)

$V_n - U_n = W_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $U_n \leq V_n$ (**0, 5 pt**)

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + 2V_n}{3} - U_n = \frac{2V_n - 2U_n}{3} = \frac{2}{3}W_n$ (**0, 5 pt**)

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 4V_n}{5} - V_n = \frac{U_n - V_n}{5} = -\frac{1}{5}W_n$ (**0, 5 pt**)

$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}W_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (U_n) est croissante (**0, 25 pt**)

$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{5}W_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (V_n) est décroissante (**0, 25 pt**)

4) * $U_n \leq V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

* (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante

* $\lim (V_n - U_n) = \lim W_n = 0$

Donc (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes donc elles convergent vers la même limite ℓ (**0, 5 pt**)

5) a) $T_{n+1} = 3U_{n+1} + 10V_{n+1} = U_n + 2V_n + 2(U_n + 4V_n) = 3U_n + 10V_n = T_n$

donc (T_n) est une suite constante (**0, 5 pt**)

b) (T_n) est une suite constante donc $T_n = T_0 = 3U_0 + 10V_0 = 23$ donc $3U_n + 10V_n = 23$ d'où

$3\ell + 10\ell = 23$ d'où $\ell = \frac{23}{13}$ (**0, 5 pt**)

Solution-Exercice 3

1) $(1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$ (0,5 pt)

2) a) $a = 2 ; b' = -2 ; c = 3 - i\sqrt{3}$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 2(3 - i\sqrt{3}) = 4 - 6 + 2i\sqrt{3} = -2 + 2i\sqrt{3} = (1 + i\sqrt{3})^2$$

donc $\delta' = 1 + i\sqrt{3}$ est une racine carrée de Δ'

$$z_1 = \frac{-b' - \delta'}{a} = \frac{2 - 1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-b' + \delta'}{a} = \frac{2 + 1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$S_C = \left\{ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} ; \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right\} \text{ (1 pt)}$$

b) $z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (0,5 pt)

$$z_2 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} ; |z_2| = \left| \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$$

soit $\varphi \equiv \arg(z_2)[2\pi]$ donc $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ d'où $\varphi = \frac{\pi}{6}$; $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ (0,5 pt)

3) a) * 1^{ère} méthode :

$$OA = |\alpha| = 1 ; OC = |\beta| = \sqrt{3} \text{ et } AC = |\beta - \alpha| = |1 + i\sqrt{3}| = 4$$

$$OA^2 + OC^2 = AC^2 \text{ donc le triangle } OAC \text{ est rectangle en } O$$

* 2^{ème} méthode :

$$\left(\widehat{OA, OC} \right) \equiv \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)[2\pi] \equiv \arg \beta - \arg \alpha [2\pi] \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

* 3^{ème} méthode :

$$\frac{aff(\overline{OC})}{aff(\overline{OA})} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3} : \text{imaginaire pur donc } \overline{OC} \perp \overline{OA}$$

cl : OAC est un triangle rectangle en O (0,75 pt)

b) puisque OAC est un triangle rectangle en O alors il suffit que OABC soit un parallélogramme c.à.d.

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{OC} \text{ sig } z_B = \alpha + \beta = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} = 2 \text{ (0,75 pt)}$$

4) a) $2i \sin \theta e^{i\theta} = 2i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} e^{i\theta} = e^{2i\theta} - e^{i0} = e^{2i\theta} - 1$ (0,5 pt)

b) $a = 1 ; b' = -1 ; c = -2i \sin \theta e^{i\theta}$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 1 + 2i \sin \theta e^{i\theta} = 1 + e^{2i\theta} - 1 = e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$$

donc $\delta' = e^{i\theta}$ est une racine carrée de Δ'

$$z = \frac{-b' - \delta'}{a} = 1 - e^{i\theta} = 1 - \cos \theta - i \sin \theta \text{ ou } z = \frac{-b' + \delta'}{a} = 1 + e^{i\theta} = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$$

or $Im(1 - \cos \theta - i \sin \theta) = -\sin \theta < 0$ car $\theta \in]0, \pi [$

donc $z' = 1 - e^{i\theta}$ et $z'' = 1 + e^{i\theta}$ et $S_C = \{z' ; z''\}$ (1 pt)

c) $z' = \alpha \text{ sig } 1 - \cos \theta - i \sin \theta = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sig } \begin{cases} 1 - \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ sig } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$z'' = \beta \text{ sig } 1 + \cos \theta + i \sin \theta = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sig } \begin{cases} 1 + \cos \theta = \frac{3}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ sig } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

comme $\theta \in]0, \pi [$ alors $\theta = \frac{\pi}{3}$ (0,5 pt)

Solution-Exercice 4

1) a) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ (quotient et composée) et

$$f'(x) = 2 \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ **(0,75 pt)**

c) f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ alors f est une bijection de $[0, +\infty[$

$$\text{sur } f([0, +\infty[) = \left] \lim_{+\infty} f, f(0) \right[=]0,2] = I \quad \text{(0,75 pt)}$$

c) $f^{-1}:]0,2] \rightarrow [0, +\infty[$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = y \text{ sig } f(y) = x \text{ sig } \frac{2}{\sqrt{1+y}} = x \text{ sig } \left(\frac{2}{\sqrt{1+y}} \right)^2 = x^2 \text{ sig } \frac{4}{1+y} = x^2 \text{ sig } \frac{1+y}{4} = \frac{1}{x^2} \text{ sig}$$

$$1+y = \frac{4}{x^2} \text{ sig } y = \frac{4}{x^2} - 1$$

$$\text{Donc } \boxed{f^{-1}(x) = \frac{4}{x^2} - 1 ; x \in]0,2]} \quad \text{(0,75 pt)}$$

d) Soit $g(x) = f(x) - x$

g est continue sur $[1,2]$

$$g(1) \times g(2) = (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 2 \right) < 0$$

g est dérivable sur $[1,2]$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[1,2]$

Alors l'équation $g(x) = 0$ cad $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]1,2[$ **(0,75 pt)**

$$2) |f'(x)| = \left| -\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} \right| = \frac{1}{(\sqrt{1+x})^3}$$

$$\text{Or } x \in [1,2] \text{ donc } x \geq 1 \text{ sig } x+1 \geq 2 \text{ sig } \sqrt{x+1} \geq \sqrt{2} \text{ sig } (\sqrt{x+1})^3 \geq 2\sqrt{2} \text{ sig } \frac{1}{(\sqrt{x+1})^3} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc pour tout } x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{(0,5 pt)}$$

3) a) * pour $n = 0, 1 \leq u_0 = 1 \leq 2$

* on suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

$$1 \leq u_n \leq 2 \text{ et } f \text{ est strictement décroissante sur } [1,2] \text{ alors } \underbrace{f(2)}_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \leq f(u_n) \leq \underbrace{f(1)}_{\sqrt{2}}$$

$$\text{donc } 1 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{2} \leq 2 \text{ d'où } 1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

* cl : pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$ **(0,75 pt)**

b) f est dérivable sur $[1,2]$

$$\text{pour tout } x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$u_n \text{ et } \alpha \in [1,2] \text{ alors } |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha| \text{ or } f(\alpha) = \alpha$$

$$\text{donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha| \quad \text{(0,5 pt)}$$

$$\text{c) * pour } n = 0, |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^0 = 1$$

* on suppose que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n$, montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{n+1}$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n \text{ donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^{n+1}$$

* cl : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ **(0,75 pt)**

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{2\sqrt{2}} \in]-1,1[\text{ donc } \lim \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^n = 0$$

d'où $\lim u_n = \alpha$ (0,5 pt)