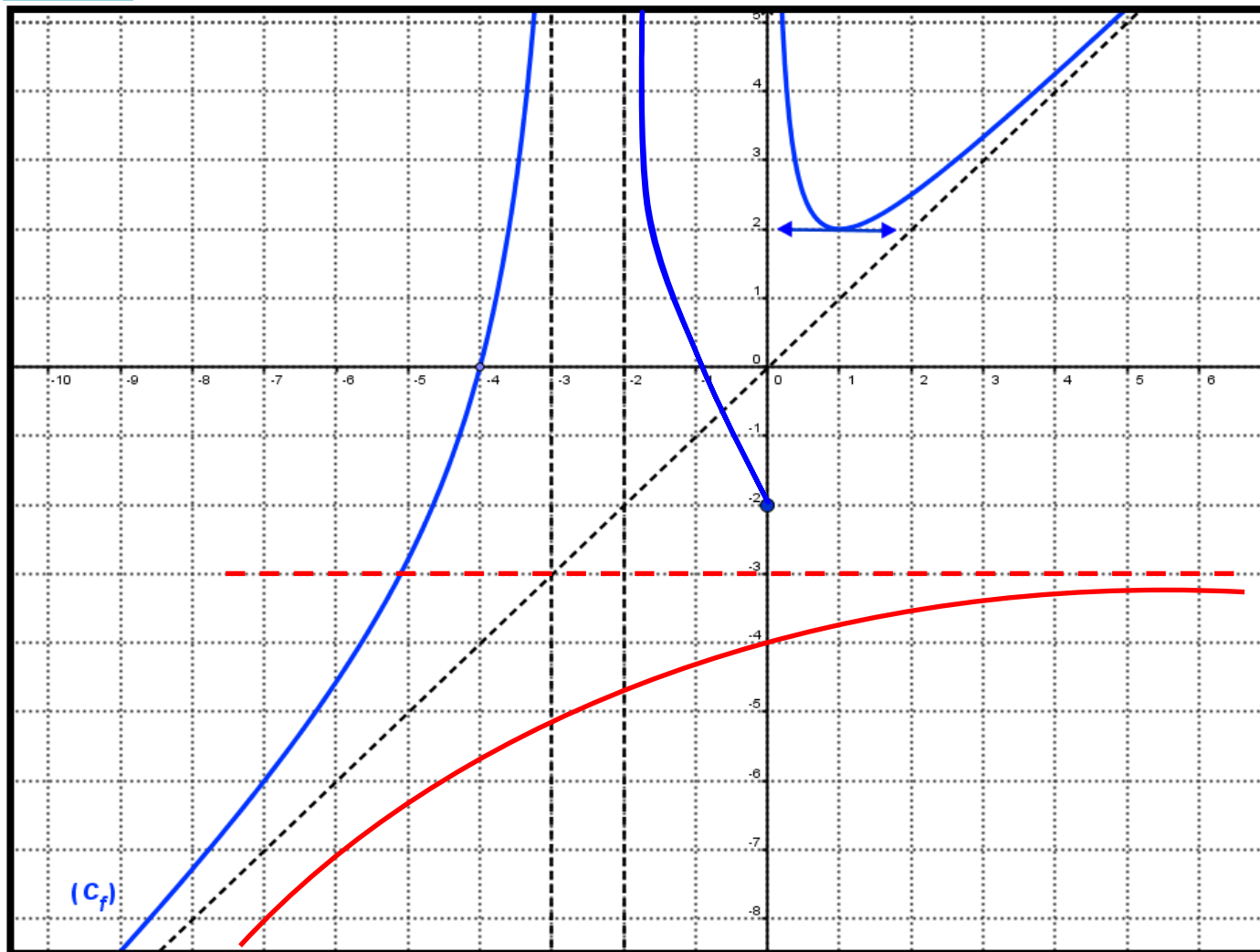


ANNEXE 1.



ANNEXE 2.

|                             |                                    |                                   |  |                                   |     |
|-----------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|--|-----------------------------------|-----|
| Domaine de définition de f. | $]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[$ | Domaine de continuité de f.       | $]-\infty, -3[ \cup ]-2, 0[ \cup ]0, +\infty[$ |                                   |     |
| $\lim_{+\infty} f =$        | $+\infty$                          | $f(0) =$                          | $-2$   | $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} =$ | $1$ |
| $\lim_{-\infty} f =$        | $-\infty$                          | $\lim_{0^+} f =$                  | $+\infty$                                      | $\lim_{+\infty} f(x) - x =$       | $0$ |
| $\lim_{(-2)^+} f =$         | $+\infty$                          | $\lim_{0^-} f =$                  | $-2$   | $\lim_{-\infty} f(x) - x =$       | $0$ |
| $\lim_{(-3)^-} f =$         | $+\infty$                          | $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} =$ | $1$  |                                   |     |

|                             |  |                             |  |                     |            |
|-----------------------------|--|-----------------------------|--|---------------------|------------|
| Domaine de définition de H. | $]-4, -3[ \cup ]-2, -1[ \cup ]0, +\infty[$ | Domaine de continuité de H. | $]-4, -3[ \cup ]-2, -1[ \cup ]0, +\infty[$ | H (-1)=             | $0$        |
| H (-4)=                     | $0$  | H(0)=                       | N'existe pas.                              | H (1)=              | $\sqrt{2}$ |
| $\lim_{+\infty} H =$        | $+\infty$                                  | $\lim_{0^+} H =$            | $+\infty$                                  | $\lim_{(-3)^-} H =$ | $+\infty$  |

Sur  $]-\infty, -3[$  ; f est continue et Strictement ↗ donc elle réalise une bijection de  $]-\infty, -3[$  vers  $f (]-\infty, -3[) = ]\lim_{+\infty} f, \lim_{(-3)^-} f [ = ]\mathbb{R}.$   
 La courbe de  $f^{-1}$  est le symétrique de  $C_f$  par rapport à  $\Delta : y=x.$

Le : 03-11-2012.

**EXERCICE n°1. (6 Pts)**

Dans l'annexe 1, la courbe  $(C_f)$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  dans un RON.

La droite  $(\Delta)$  est une asymptote à  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .

On considère la fonction  $H(x)=g \circ f(x)$ , où  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ ; x \rightarrow \sqrt{x}$

Par lecture graphique, Compléter les deux tableaux de l'annexe 2,

Puis justifier la bijectivité de  $f$  de  $]-\infty, -3[$  vers  $\mathbb{R}$ , et tracer la courbe de sa réciproque dans le même repère.

**EXERCICE n°2. (6 Pts)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - x & \text{si } x \leq 0 \\ 3x + 2\sqrt{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1- Etudier la continuité de  $f$  en 0 et en 1.

- $\lim_{0^-} f = \lim_{0^+} f = 0 = f(0) \Rightarrow f$  est continue en 0.
- $\lim_{1^-} f = 5 \neq \lim_{1^+} f = 0 = f(1) \Rightarrow f$  n'est pas continue en 1.

2-

a. Montrer que pour  $x < 0$ , on a :  $-x - 1 \leq f(x) \leq -x + 1$

- Pour  $x < 0$  ;  $f(x) = \sin x - x$  or  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc  $-x-1 \leq f(x) \leq -x+1$

b. Déduire la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $-\infty$

- Comme  $-x-1 \leq f(x) \leq -x+1$  pour  $x < 0$  alors  $\frac{-x+1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{-x-1}{x}$   
Or  $\lim_{-\infty} \frac{-x+1}{x} = \lim_{-\infty} \frac{-x-1}{x} = -1$  donc  $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

3-

a. Montrer que l'équation  $f(x)=1$  admet dans  $]0, 1[$  une unique solution  $\alpha$

- Sur  $]0, 1[$  ;  $f(x)=3x+2\sqrt{x}$ .  $f$  est continue et dérivable et  $f'(x)=3+1/\sqrt{x} > 0$   
Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$  et on a  $f(]0, 1[) = ]0, 5[$  contient 1.  
Alors l'équation  $f(x)=1$  admet dans  $]0, 1[$  une unique solution  $\alpha$

b. Déterminer la valeur exacte de  $\alpha$

$f(x)=1 \Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x}-1=0$ . On pose  $t=\sqrt{x} > 0$ , donc  $3t^2+2t-1=0$  à deux solutions ( $t=-1$  et  $t=1/3$ )

Alors du fait que  $t > 0$  on aura  $\sqrt{x}=1/3$  par suite  $x=1/9$

$\alpha=1/9$ .

4-

a. Vérifier que  $f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ , et que  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$  pour  $x > 1$

Sur  $]1, +\infty[$ ;  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$  est dérivable, puisque  $x \rightarrow \frac{x-1}{x+1}$  positive et dérivable sur  $]1, +\infty[$  et  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

b. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  vers un intervalle  $I$  à déterminer.

Sur  $]1, +\infty[$ ,  $f$  est strictement croissante (car  $f'(x) > 0$ ) donc elle réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  vers  $I = f(]1, +\infty[) = [f(1), \lim_{+\infty} f[ = [0, 1[$ .

c. Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in I$ .

Soit  $x \in ]0, 1[$  et  $y \in ]1, +\infty[$  tel que  $f^{-1}(x) = y$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y-1}{y+1}} = x \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} = x^2 \Leftrightarrow y-1 = x^2 + yx^2 \Leftrightarrow y(1-x^2) = 1+x^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

### EXERCICE n°3. (2.5 Pts)

On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z & \rightarrow & \frac{iz+1-i}{z-1} \end{array}$$

1- Donner l'image de  $-1$  par  $f$ , puis l'antécédent de  $1+i$  par  $f$ .

$$\text{L'image de } (-1) \text{ est : } \frac{-i+1-i}{-1-1} = \frac{1-2i}{-2} = -\frac{1}{2} + i$$

$$\text{L'antécédent de } (1+i) \text{ est } z \text{ tel que } f(z) = 1+i \text{ sig } \frac{iz+1-i}{z-1} = 1+i \Leftrightarrow z(1+i-i) = 1-i+1+i \Leftrightarrow z = 2$$

2- Déterminer la forme algébrique de  $f(i-1)$

$$f(i-1) = \frac{i(i-1)+1-i}{i-1-1} = \frac{2i}{i-2} = \frac{4i-2}{5}$$

3- On pose  $a = \frac{(19-4\sqrt{3})+i(1-2\sqrt{3})}{17-4\sqrt{3}}$ . Déterminer la forme exponentielle de  $f(a)$ .

$$\begin{aligned}
 f(a) &= \frac{i \frac{(19 - 4\sqrt{3}) + i(1 - 2\sqrt{3})}{17 - 4\sqrt{3}} + 1 - i}{\frac{(19 - 4\sqrt{3}) + i(1 - 2\sqrt{3})}{17 - 4\sqrt{3}} - 1} \\
 &= \frac{19i - 4i\sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{3} + 17 - 4\sqrt{3} - 17i + 4i\sqrt{3}}{19 - 4\sqrt{3} - 17 + 4\sqrt{3} + i(1 - 2\sqrt{3})} \\
 &= \frac{(16 - 2\sqrt{3}) + i(2)}{2 + i(1 - 2\sqrt{3})} = \frac{[(16 - 2\sqrt{3}) + i(2)] \cdot [2 - i(1 - 2\sqrt{3})]}{[2 + i(1 - 2\sqrt{3})] \cdot [2 - i(1 - 2\sqrt{3})]} \\
 &= \frac{(34 - 8\sqrt{3}) + i(34\sqrt{3} - 24)}{17 - 4\sqrt{3}} = \frac{2(17 - 4\sqrt{3}) + 2i\sqrt{3}(17 - 4\sqrt{3})}{17 - 4\sqrt{3}} \\
 &= 2 + 2i\sqrt{3} = 4 \cdot e^{\frac{i\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

#### EXERCICE n°4. (5.5 Pts)

Le plan complexe est rapporté à un RON. (O, i, j).

On considère les points A et B d'affixes respectives (2+3i) et (2i-3)

1-

a. Montrer que : les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2 + 3i}{2i - 3} = \dots = -i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (OA) \perp (OB)$$

b. Montrer que : OA=OB.

$$\left| \frac{z_A}{z_B} \right| = 1 \Leftrightarrow OA = OB$$

c. Dédurre que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O.

*(OA) \perp (OB) et OA = OB donc ... ..*

2- Déterminer l'affixe du point I milieu de [AB],

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + 5i}{2}$$

Et déduire celle du point D pour que : OADB soit un carré.

$$I = O * D \Leftrightarrow z_I = \frac{z_O + z_D}{2} = -1 + 5i$$

3- Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \{M(z) \text{ tel que : } |z - 2 - 3i| = \sqrt{13}\}$$

$$|z - 2 - 3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |z_M - z_A| = \sqrt{13} \Leftrightarrow AM = \sqrt{13}$$

Donc M décrit le cercle de centre A et de rayon  $\sqrt{13}$ .

$$F = \{M(z) \text{ tel que : } \left| \frac{z - 2i + 3}{z - 2 - 3i} \right| = 1\}$$

$$\left| \frac{z - 2i + 3}{z - 2 - 3i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \right| = 1 \text{ avec } z_M \neq z_A$$

$\Leftrightarrow MB = MA$ . Donc M décrit la médiatrice de [AB].

$$G = \{M(z) \text{ tel que : } \text{Arg.} \left( \frac{z - 2i + 3}{z - 2 - 3i} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]\}$$

$$\text{Arg.} \left( \frac{Z - 2i + 3}{Z - 2 - 3i} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \leftrightarrow \text{Arg.} \left( \frac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \leftrightarrow (\widehat{MA, MB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc M décrit le demi-cercle de diamètre [AB] privé de A et B, et contenant O

Puisque  $(\widehat{OA, OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

