Devoir de synthèse N°1 *Classe :4^{em}Sc3*

Durée 2heures

Exercice N°1 : *(3 pts)*

A∗Pour chacune des propositions suivantes une seule est exacte le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit h la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x) = \sin x$, $(h^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale à :

a. $\sqrt{2}\ \frac{2}{\sqrt{3}}$ **b.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $\sqrt{2}$

2) L'ensemble des points M d'affixe z tel que :$|z-2i| = |2-z|$ est :

a. cercle de centre O et de rayon 2 **b.** droite $\Delta: y = 2x$ **c.** droite $\Delta: y = x$

B∗ Pour chacune des affirmations suivantes répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\sin x}{x-\sin 2x} = 3$

2) Les solutions de l'équations $z^4 = 9(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$ sont les nombres complexes :

a. $z_k = \sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})}, ou\ k \in \{0;1;2;3\}$

Exercice N°2 : *(6 pts)*

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) :$iz^2 + e^{i2\theta}z + i\left(e^{i2\theta}+1\right) = 0$, ou $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Et soit $z_1\ et\ z_2$ les solutions de l'équation (E_θ) .

1) **a.** Montrer que : $1 + e^{i2\theta} = 2\cos\theta e^{i\theta}$.

b. Sans calculer $z_1\ et\ z_2$, montrer que arg $\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

c. Déterminer la valeur de θ pour que $z_1 + z_2 = -1$.

2) **a.** Calculer $(e^{i2\theta}+2)^2$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ)

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé ($O;\vec{u};\vec{v}$). Soit A et M les points d'affixe respectives $z_A = -i\ et\ z_M = i(1+e^{i2\theta})$

a. Ecrire z_M sous forme trigonométrique .

b. Déterminer θ pour que le triangle OAM est un triangle isocèle en O .

c. Déterminer et construire l'ensemble des points M quand $\theta\ varie\ dans\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice N°3 : *(5 pts)*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$

1) **a.** Dresser le tableau des variations de f

b. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha\ sur\ \mathbb{R}_-$ et que $\alpha \in \left]-\frac{1}{2},0\right[$

2) On définie la suite réelle $(u_n)\ par$: $u_0 = 0\ et\ u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $-\frac{1}{2} \le u_n \le 0$.

b. Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors elle converge vers α.

3) **a.** Montrer pour tout réel $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ $on\ a :$ $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

b. En utilisant le théorème d'inégalité d'accroissement fini, montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq (\frac{3}{4})^n$

d. Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice N°4 : (6 pts)

Dans la feuille annexe on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction g définie et dérivable sur $[-1, +\infty[$, une droite Δ $d'équation$ $\Delta: y = x$, la courbe $\mathscr{C}$ admet :

∗ une demi tangente à droite en -1.

∗ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j}\ )$ au voisinage de $(+\infty\ )$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} \ si\ x \in]-\infty, -1[\\ f(x) = g(x)\ \ si\ x \in [-1, +\infty[\end{cases}$

1) **a.** Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)\ et\ \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Montrer que f est continue en -1 .

2) **a.** Vérifier que pour tout réel $x < -1\ on\ a$: $\frac{f(x)}{x+1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$.

b. En déduire la dérivabilité de f à gauche en -1 .

c. Etudier la dérivabilité de $f\ en$ (-1) et interpréter le résultat géométriquement.

3) **a.** Montrer que f est dérivable sur$\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ $et\ que\ f'(x) = \frac{-3}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$ $si\ x \in]-\infty, -1[$.

b. Dresser le tableau des variations de f.

c. Montrer qu'il existe un réel $c \in]-1,1[$ $tel\ que$: $g'(c) = 2$.

4) **a.** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

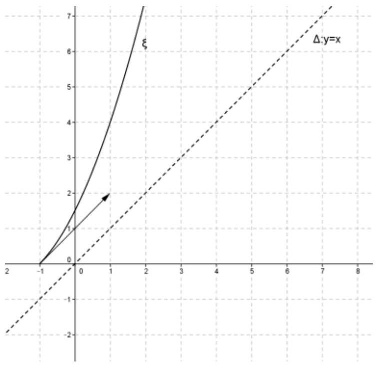
b. Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que $(g^{-1})'(0) = 1$

c. Construire dans la feuille annexe la courbe $\mathscr{C}'$ de g^{-1}.

Bon Travail

Feuille annexe à rendre

Nom et prénom :..



CORRECTION(proposée par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

A) 1)a 2)c

B)1)<u>faux</u>

$\lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{sinx}{x}}{1-2\frac{sin2x}{2x}}=\frac{3+1}{1-2}=-4$

2)<u>VRAI</u>

$z^4=9e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi}\ \ donc\ z_k=\sqrt[4]{9}e^{\frac{i(3\frac{\pi}{4}+2k\pi)}{4}}=\sqrt{3}e^{i(\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2})}\ ; k\in\{0;1;2;3\}$

EXERCICE2

1)$a\ \ on\ a : 1+e^{2i\theta}=e^{i\theta}\times e^{-i\theta}+e^{i\theta}.e^{i\theta}=\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)e^{i\theta}=2cos\theta\ e^{i\theta}$

<u>REMARQUE</u> on peut devevopper le second membre et on retrouve

le resultat

b)$\arg\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)=\arg\left(\frac{z_1+z_2}{z_1.z_2}\right)=\arg(z_1+z_2)-\arg(z_1z_2)=$

$\arg\left(-\frac{e^{i2\theta}}{i}\right)-\arg\left(\frac{i\left(1+e^{i2\theta}\right)}{i}\right)=2\theta+\frac{\pi}{2}-\theta[2\pi]=\theta+\frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$

c)$z_1+z_2=-\frac{e^{2i\theta}}{i}=ie^{2i\theta}=e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=-1=e^{i\pi}\ \ donc$

$2\theta+\frac{\pi}{2}=\pi+2k\pi; k\in IZ\ \ d'ou\ \theta=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ; k\in IZ$

2)a)$(e^{2i\theta}+2)^2=e^{4i\theta}+4e^{2i\theta}+4$

b)$\Delta=e^{4i\theta}-4i.i\left(e^{2i\theta}+1\right)=\left(e^{2i\theta}+2\right)^2\ \ donc$

$z=\frac{-e^{2i\theta}-e^{2i\theta}-2}{2i}=-\left(\frac{e^{2i\theta}+1}{i}\right)=i(1+e^{2i\theta})ou\ z=\frac{2}{2i}=-i$

3)a) $z_M = i\left(e^{2i\theta}+1\right) = 2cos\theta\,.e^{i\theta}.i^{\frac{\pi}{2}} = 2cos\theta\ .e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} =$

$2cos\theta\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+isin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2cos\theta(-sin\theta+icos\theta)$

b)$OAM\ est\ isocele\ en\ O\ \Leftrightarrow OA = OM\ \Leftrightarrow |z_A| = |z_M|$

$\Leftrightarrow |i| = \left|2cos\theta\ e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right| \Leftrightarrow |cos\theta| = \frac{1}{2}\ mais$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ donc\ \ cos\theta = \frac{1}{2}\ et\ alors\ \theta = \frac{\pi}{3}$

c)$|z_M| = OM = 2cos\theta\ \ \Leftrightarrow M \in \tau(O;2cos\theta)cercle$

EXERCICE3

1)$a)$ $f'(x) = \frac{2x(x^2+2)-2x(x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \frac{6x}{(x^2+2)^2}\ \ donc\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	-∞		0		+∞
f'(x)		-	0	+	
f(x)	1	↘	-1/2	↗	1

b)$soit\ g(x) =$
$f(x) - x\ \ elle\ est\ continue\ et\ strictement\ monotone\ sur\ IR_-\ en$

$particulier\ sur\ ]-\frac{1}{2};0\left[\ \begin{matrix} et\ g(0)\times g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 donc \\ g(x) = 0\ admet\ une\ seule\ solution\ \alpha\ dans \end{matrix}\right] -$
$\frac{1}{2};0[\ d'oule\ resultat$

$2)a)\ pour\ n=0\ on\ a: -\frac{1}{2} \leq 0 \leq 0\ \ vrai\ \ supposons\ pour\ n \geq 1$

$que -\frac{1}{2} \leq u_n \leq 0\ \ ; montrons\ que -\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 0\ \ ona\ alors$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq f(u_n) \geq f(0) car f\ est\ decroissante\ sur$

$]-\infty; 0[\ donc\ 0 \leq u_{n+1} \leq 0$

Donc $\forall n \in IN\ \ on\ a -\frac{1}{2} \leq u_n \leq 0$

b)$on\ a:\ -\frac{1}{2} \leq u_n \leq 0\ et\ que$

$f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(-\frac{1}{2}\right) (f\ est\ decroissante) donc$

$u_{n+1} - u_n \geq 0 + f(0) \geq 0\ donc\ (u)_n\ est\ croissante\ majore$

$par\ 0\ donc\ convergente$

$puisque\ la\ suite\ est\ convergente\ vers\ une\ limite\ l\ alors\ l$

$doit\ verifier\ l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{l^2-1}{l^2+2}\ \ or\ f(l) =$
$l\ admet\ une\ seule\ solution\ \alpha\ dans\ \left[-\frac{1}{2}; 0\right]\ donc\ l = \alpha$

3)a) $sur\ \left[-\frac{1}{2}; 0\right]\ ona\ f'(x) = \frac{6x}{(x^2+2)^2}\ on\ a: f''(x) =$
$\frac{6(2-x^2)}{(x^2+2)^3}\ donc\ \ d'apres\ le\ tableau\ de\ variation\ de\ f'(x)$

$on\ conclue\ que -\frac{3}{4} \leq -\frac{16}{27} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{3}{4} donc\ |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

b)$d'apresle\ corollaire\ du\ TAF\ on\ a$

: $\left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| \leq \frac{3}{4}\ donc\ |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n-\alpha|$

c) par iteration $|u_n-\alpha| \leq |u_{n-1}-\alpha|$......................................

....

....

$|u_1-\alpha| \leq \frac{3}{4}|u_0-\alpha|\ par\ multiplication$

$membre\ a\ membre$

$et\ apres\ simplification\ on\ a$:

Vu que $u_0 = 0\ donc\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

d)$on\ a$: $-1 < \frac{3}{4} < 1\ donc\ \lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0\ donc\ \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

EXERCICE4

1)a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \times (-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^3}} = -1$;

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\ (branche\ parabolique\ de\ direction\left(O\ ;\vec{j}\right)$

$au\ voisinage\ de\ +\infty)$

b)$\lim_{x\to-1^-} f(x) = O$ $et\ puisque\ la\ courbe\ \left(C_f\right)admet\ une$

$demi\ tangente$ à $droite\ en\ (-1)\ alors\ \lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$

$et\ que\ f(-1) = 0\ donc\ f\ est\ continue\ en\ (-1)$

2)a)$pour\ x < -1\ on\ a:\ \frac{f(x)}{x+1} = \frac{\frac{1}{x}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)}{(x+1)(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{x^2}(x^3+1)}{(x+1)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}} =$

$\frac{(x+1)(x^2-x+1}{x^2(x+1)\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}} = \frac{x^2-x+1}{x^2(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$

b)$\lim_{x\to-1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{x^2-x+1}{x^2(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}} =$

$+\infty\ donc\ f\ n'estpas\ derivable\ a\ gauche\ en\ (-1)$

c)$f\ est\ derivable\ sur[-1;+\infty[\ donc\ derivable\ a\ droite\ en\ (-1)$

demi tangente en(-1)

3)a)$pour\ x < -1\ f\ est\ deribable\ fonction\ racine\ d'unefonction$

$rationnelle\ positive\ donc\ derivable\ et\ que\ g\ est\ derivable\ pour$

$x \geq -1\ et\ que\ f\ n'estpas\ derivable$ à $gauche$

$en\ (-1)donc\ n'estpas\ derivable\ en\ (-1)alors\ f\ est$

$derivable\ sur\ IR - \{-1\}$

Pour x<-1 on a:$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}\right) + \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}} =$

$\frac{-3}{2x^3\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c)g *est une fonction continue sur* $[-1\,;1]$ *derivable sur*

$]-1,1[$ *donc d'apres le TAF il existe* $c \in]-1,1[$ *tel que*

$g'(c) = \frac{g(1)-g(-1)}{1+1} = \frac{4-0}{2} = 2$

4)g est continue et strictement croissante pour ≥ -1 *donc elle admet*

Une fonction reciproque g^{-1} :$[0\,;+\infty[\longrightarrow [-1\,;+\infty[$

b)g est derivable donc g^{-1} est derivable et sur $[0\,;+\infty[$

et $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1})(0)}$; *on pose* $g^{-1}(0) = a \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(a) = 0 \text{ donc } a = -1 \text{ d'apres le tableau d'ou } (g^{-1})'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

c) la courbe representative de g^{-1} est la symétrique de c_g par rapport

a la droite Δ :y=x