Devoir de synthèse n° 1

Niveau : bac Sc Mathématiques **Durée : 2 h**

EXERCICE N° 1 (3points) QCM

EXERCICE n° 2 (6,5points)

I. Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.
2) Dresser le tableau de variation de f
3) a/ Montrer que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

c/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in I$

II. Soit g la fonction définie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{f(\frac{1}{cosx})} sur [0;\frac{\pi}{2}[\\ \frac{1}{2}\ si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

1) Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$
2) Vérifier que pour tout $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $g(x)=\frac{1}{1+sinx}$
3) Montrer que g réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
4) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};1\right]$ et calculer $(g^{-1})'(x)$

EXRCICE N° 3(4,5points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $2z^2+(7+i\sqrt{3})z-4(1-i\sqrt{3})=0$
   a/ Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera .
   b/ Trouver **alors** l'autre solution
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $2z^4+(7+i\sqrt{3})z^2-4(1-i\sqrt{3})=0$
3) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$.

   Soient A et B deux point d'affixes respectives $z_A=2i\ et\ z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

   et I le milieu de [OA]

   Montrer que le triangle OIB est isocèle.

EXERCICE N° 4 (6points)

On définit les suites (v) et (u) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+4v_n}{5} \end{cases}$ pour $n \in IN$

On pose $w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et préciser sa limite .
2) Exprimer (w_n)en fonction de n et en déduire que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) a/ Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction (w_n)
   en déduire le sens de variation de (u_n)
   b/ Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction (w_n)
   en déduire le sens de variation de (v_n)
4) justifier que $u_n\ et\ v_n$ convergent vers la même limite l
5) On pose $T_n = 3u_n + 10v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a/ Montrer que la suite (T_n)est constante
   b/ Déduire la valeur de l

Bon travail

NB : cette feuille à rendre avec la copie

Nom et prénom : …………………………………..n° ……….classe………

Exercice N°1

Cocher la réponse exacte :

Soit f une fonction dérivable sur [-2 ;2] dont le tableau de variation de f' est le suivant

x	-2		-1		0		1		2
f'	1	↘	0	↘	-2	↗	-1	↗	-0,25

Alors :

1) $f(-2) < f(-1)$ ☐
   $f(-1) < f(0)$ ☐
   $f(0) < f(1)$ ☒

2) $|f(2) - f(-2)| \leq 2$ ☒
   $|f(2) - f(-2)| \leq 4$ ☐
   $|f(2) - f(-2)| \leq 8$ ☐

3) La courbe de f admet au point d'abscisse 0 :

   une tangente de pente -2 ☐
   une tangente horizontale ☒
   une tangente verticale ☐

CORRECTION(proposée par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

1)$g(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x-1}}$

$donc\ \lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty\ donc\ f\ n'estpas\ derivable\ a\ droite\ en\ 1$

2) f est derivable $\forall x > 1\ et\ f'(x) = \frac{(\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\times x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{1}{2x^2\sqrt{x^2-1}}\ \forall x > 1$

X	1		$+\infty$
f ‘(x)	||	+	
f(x)	1	$\nearrow$	2

3)$a)\ f\ est\ continue\ et\ strictement\ croissante\ sur\ [1,+\infty[$

$donc\ elle\ realise\ une\ bijection\ de\ [1,+\infty[\ sur\ I = [1,2]$

b) $f^{-1}\ est\ derivable\ sur\ ]1;2[$

c)$pour\ x \in]1,2[\ et\ y \in]1,+\infty[\ posons\ y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y} + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2.y^2 = y^2 - 1\ \Leftrightarrow y^2(x^2-2x) = -1\ avec\ y > 1\ donc$

$y = \frac{1}{\sqrt{-x^2+2x}} = f^{-1}(x)$

II)$0 \le x < \frac{\pi}{2}\ ;g(x) = \frac{1}{\frac{\sqrt{\frac{1}{cos^2x}-1}}{\frac{1}{cosx}}+1} = \frac{1}{sinx+1}$ (1111)

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{f\left(\frac{1}{cosx}\right)} = \frac{1}{2}\ car\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} = +\infty\ et\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\ et$

$que\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ donc\ g\ est\ continue\ a\ gauche\ en \frac{\pi}{2}$

2) déjà fait (1111)

3) g *est continue et strictement decroissante sur*

$J = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *donc elle realise une bijection de* J *sur* $L = [\frac{1}{2};1]$

$\left(g'(x) = \frac{-cosx}{(1+sinx)^2} < 0\right)$ pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

4)g^{-1} *est derivable sur*$]\frac{1}{2},1]$ *car* f *n'est pas derivable* à *droite en* 1

$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1})(x)} = \frac{1}{g'(y)}$ *avec* $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow$ **<u>x=g(y)</u>** (2222)

$x \in]1/2\ ,1]$; $y \in [0;\pi/2[$ *alors* $siny = \frac{1}{x} - 1$ *et* $cosy = \sqrt{1-(1-\frac{1}{x})^2}$ vu (2222)

$donc\ g'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-(1-\frac{1}{x})^2}}$

EXERCICE3

1)a)
si $z = a$ *une solution réelle alors* $2a^2 + \left(7 + i\sqrt{3}\right)a - 4\left(1 - i\sqrt{3}\right) =$
0 *par identification on aura* $\begin{cases} 2r^2 + 7r - 4 = 0 \\ r + 4 = 0 \end{cases}$

donc $r = -4$ *que l'on verifie bien*

b)*si* k *est la deuxieme solution on a*: $-4k = \frac{c}{a} = \frac{-4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2}$

donc $k = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

REMARQUE

on peut retrouver le resultat autrement on a$: r + k = -4 + k =$

$\frac{-b}{a} = \frac{-(7+i\sqrt{3})}{2}$ *donc* $k = \frac{8-7-i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

2)*on pose* $z^2 = Z$ *on revient a la premiere equation d'ou* $z^2 = -4$ *alors* $z = 2i$

ou $z = -2i$ *on a* : $k = \left[1; \frac{-\pi}{3}\right]$ *donc les racine carres de k sont* $z_k = e^{i\left(\frac{\frac{-\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)}$;

$k = 0$ *et* $k = 1$

3)$z_I = i$; *on a*: $OI = |z_I| = 1; OB = |z_B| = 1$ *donc le triangle OIB est isocele en O*

EXERCICE4

1)

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{v_{n+1}-u_{n+1}}{v_n-u_n} = \frac{1}{15}\frac{2(v_n-u_n)}{v_n-u_n} = \frac{2}{15}$

donc $(w)_n$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{2}{15}$

2)$\boldsymbol{w_0 = 1}$ ***et donc*** $\boldsymbol{w_n = (\frac{2}{15})^n}$ $\Leftrightarrow v_n - u_n =\geq 0$ *d'ou* $v_n \geq u_n$

3)a)$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n = \frac{2}{3}(\frac{2}{15})^n}$

on a: $w_n \geq 0$ *donc* $u_{n+1} \geq u_n$ *d'ou*$(u)_n$ *est croissante*

b)$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+4v_n-5v_n}{5} = -\frac{1}{5}(v_n - u_n) = -\frac{1}{5}w_n \leq 0$ *donc* $(v)_n$ *est decroissante*

$4)a)$ $si\ (u) converge\ vers\ une\ limite\ l\ et\ (v) vers\ l' alors$ $\begin{cases} l = \frac{l+2l'}{3} \\ l' = \frac{l+4l'}{5} \end{cases} \Leftrightarrow l = l'$

5)a) $T_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = T_n$

b)$on\ a$: $T_n = T_0 = 23 = 13l\ donc\ l = \frac{23}{13}$