Sujet de révision n°1

Thèmes abordés :

Complexes ; Probabilités ; Géométrie dans l'espace ; Fonction exponentielle et lecture graphique.

Exercice n°1 ©

Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

1. Résoudre l'équation $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$.
2. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, M et N d'affixes respectives $-1+i$; $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.
b) Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, les points M et N varient sur un cercle ($\mathscr{C}$) que l'on déterminera.
3. a) Déterminer en fonction de θ l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ du triangle AMN.
b) Déterminer la valeur de θ pour la quelle l'aire $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle ($\mathscr{C}$).

Exercice n°2 ©

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.
Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français. Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :
   a. 0,4 b. 0,75 c. $\frac{1}{150}$.
2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :
   a. 0,3 b. 0,8 c. 0,4
3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est :
   a. 1,15 b. 0,4 c. 0,3
4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :
   a. 0,9 b. 0,7 c. 0,475
5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :
   a. $\frac{4}{150}$ b. $\frac{12}{19}$ c. 0,3
6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :
   a. $1-(0,25)^{20}$ b. $20\times 0,75$ c. $0,75\times(0,25)^{20}$

Exercice n°3 ©

L'espace est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3,2,6)$, B de coordonnées $(1,2,4)$ et C de coordonnées $(4,-2,5)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Vérifier que ce plan est P.

2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.

c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

3. On considère dans cette question le point G barycentre du système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

a. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

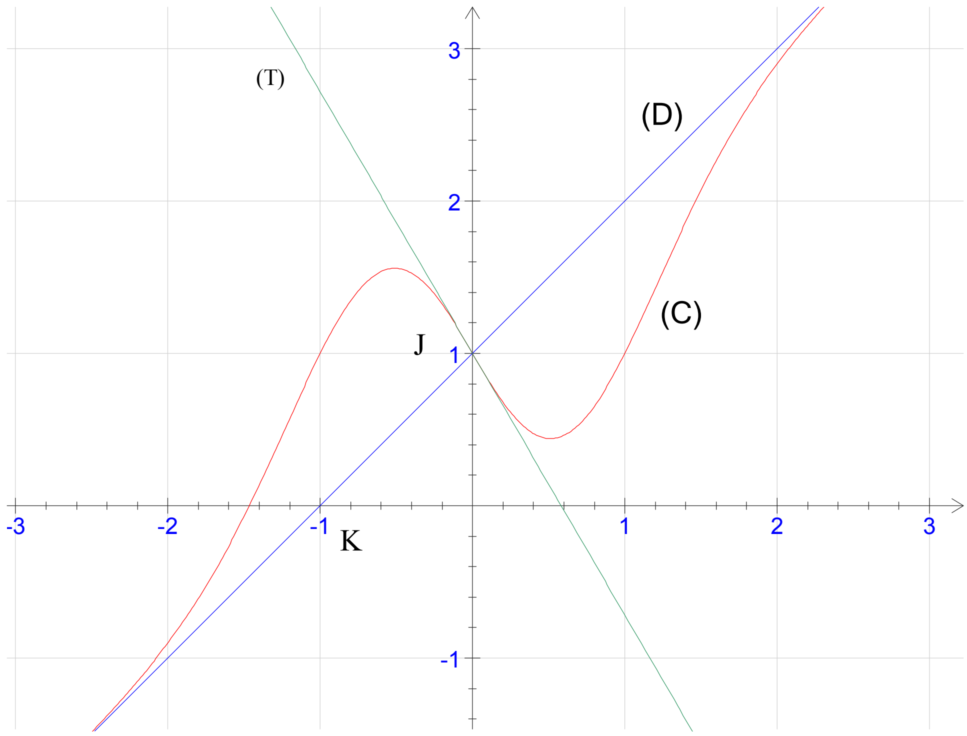
b. Déterminer la distance de G au plan P.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$. Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Exercice n°4 ©

Au dessous, figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse O.

On sait que le point $J(0\ ;\ 1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points $K(-1\ ;\ 0)$ et J, et que la tangente (T) a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.



1. Déterminer une équation de (D).
2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

   a) Démontrer que $m = p = 1$.
   b) En utilisant le point J, montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) + f(-x) = 2$.
   c) En déduire, après avoir exprimé $f(x)$ et $f(-x)$, que la fonction φ est impaire.
   d) Déduire de la question b. que f', dérivée de f, est paire.
3. On suppose maintenant que, pour tout réel x, $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
   a) En utilisant la parité de φ, démontrer que $b = 0$.
   b) Calculer $f'(x)$.
   c) En utilisant le coefficient directeur de (T), démontrer que $a = -e$.
   d) Démontrer que $f(x) \quad x \quad 1 \quad xe^{-x^2+1}$

Exercice n°1

Soit θ un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

1. $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta} = 0$

   $\Delta' = (-i)^2 - \left(-1 - e^{2i\theta}\right) = -1 + 1 + e^{2i\theta} = e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2$

   $z' = i - e^{i\theta}$ et $z' = i + e^{i\theta}$

2. A, M et N d'affixes respectives $-1+i$; $i+e^{i\theta}$ et $i-e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]0,\pi[$.

   a) $z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A = 1 + e^{i\theta}$; $z_{\overrightarrow{AN}} = z_N - z_A = 1 - e^{i\theta}$

   $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = (1+\cos\theta)(1-\cos\theta) - \sin^2\theta = 1 - \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 0$

   $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

   b) Soit I le point d'affixe i, on a : $\left|z_M - z_I\right| = \left|e^{i\theta}\right| = 1 \Rightarrow M \in \zeta_{(I,1)}$

   De même $\left|z_N - z_I\right| = \left|-e^{i\theta}\right| = 1 \Rightarrow N \in \zeta_{(I,1)}$

3. a) $\mathscr{A}(\theta)$

$$= \frac{AM \times AN}{2} = \frac{\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} \times \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2+2\cos\theta} \times \sqrt{2-2\cos\theta}}{2} = \sin\theta$$

   b) $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale lorsque $\sin\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \in]0,\pi[$.

   Dans ce cas M(2i) et N(0) = O.

Remarque :

$$z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

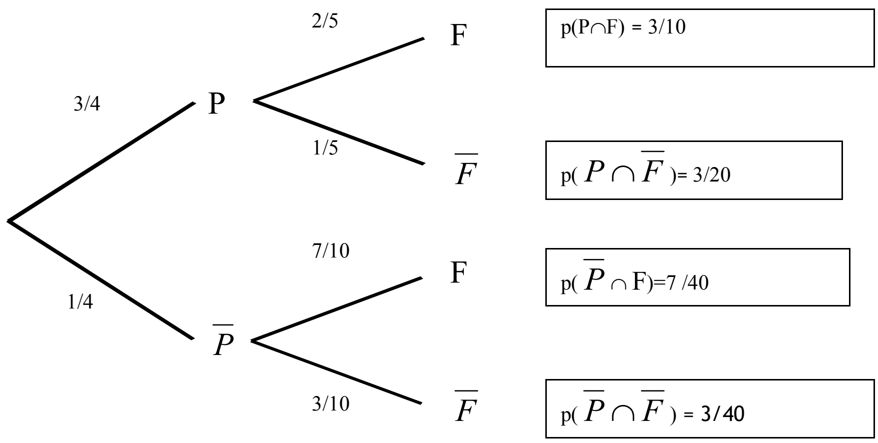
$$z_{\overrightarrow{AN}} = z_N - z_A = 1 - e^{i\theta} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$\Rightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{AN}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} = i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ **c'est un imaginaire pur** $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ **et** $\overrightarrow{AN}$ **sont orthogonaux.**

$$\mathscr{A}(\theta) = \frac{AM \times AN}{2} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} = \sin\theta$$

Exercice n°2

On note P l'évènement : « le roman est policier » et F l'évènement : « l'écrivain est français »
On peut modéliser la situation proposée par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est : **b. 0,75**

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est : **c. 0,4**

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier français est : **c. 0,3**

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est : **c. 0,475**

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est : **b.** $\frac{12}{19}$

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque. La probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est : **a.** $1-(0,25)^{20}$

Exercice n°3

1. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires $\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\0 & -4\end{vmatrix} = 8 \neq 0\right)$ $\Rightarrow$ A, B et C ne sont pas alignés $\Rightarrow$ A, B et C déterminent un plan.
   b) On vérifie que les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient l'équation $2x+y-2z+4=0$ $\Rightarrow$ P = (ABC).

2. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2\times1+0\times(-4)+(-2)\times(-1)=0$ $\Rightarrow$ ABC est un triangle rectangle en A.

b) Δ est la perpendiculaire à P passant par O $\Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ vecteur normal de P est directeur de Δ

$$\Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha \end{cases} \quad ; \alpha \in IR$$

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur P

OK = d(O, P) = $\dfrac{|2\times 0+0-2\times 0+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{4}{3}$.

d) $\mathcal{V}$(OABC) = $\dfrac{1}{3}\times A(ABC)\times OK = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{AB\times AC}{2}\times\dfrac{4}{3} = \dfrac{\cancel{2}\sqrt{2}\times\cancel{3}\sqrt{2}\times 4}{3\times\cancel{2}\times\cancel{3}} = \dfrac{8}{3}$

Autrement : $\mathcal{V}$(OABC) = $\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AO}\right|$

Où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-8\\-4\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{V}$(OABC) = $\dfrac{1}{6}\left|-8\times(-3)+(-4)\times(-2)+8\times(-6)\right| = \dfrac{1}{6}\times 16 = \dfrac{8}{3}$

3. G barycentre du système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (1)

a) I est le centre de gravité du triangle $ABC \Rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

En intercalant le point I dans (1), on obtient : $3\overrightarrow{GO}+3\overrightarrow{GI}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ G est le milieu de [OI] $\Rightarrow$ G $\in$ (OI).

b) $d(G,P)=?$

$$I\left(\frac{3+1+4}{3},\frac{2+2-2}{3},\frac{6+4+5}{3}\right)\Rightarrow I\left(\frac{8}{3},\frac{2}{3},5\right)$$

G est le milieu de [OI] $\Rightarrow G\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{2}\right)$

$$\Rightarrow d(G,P)=\frac{\left|2\times\frac{4}{3}+\frac{1}{3}-2\times\frac{5}{2}+4\right|}{3}=\frac{2}{3}$$

4. $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5 \Leftrightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=5\Leftrightarrow GM=\dfrac{5}{6}\Leftrightarrow M\in S_{\left(G,\frac{5}{6}\right)}$: la sphère de centre G et de rayon $\dfrac{5}{6}$.

$d(G,P)=\dfrac{2}{3}<\dfrac{5}{6}\Rightarrow \Gamma\cap$ P est un cercle de centre le point H projeté orthogonal de G sur P et de rayon r = $\sqrt{\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{36}}=\dfrac{1}{2}$.

Exercice n°4

1. La droite (D) passe par les points $J(0\ ;\ 1)$ et $K(-1\ ;\ 0)$, une équation est donc $y = x + 1$.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (mx+p) = 0$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, c'est la droite (D). Donc $m = p = 1$.
   b. Le point J est centre de symétrie de la courbe, on a donc la relation :
   $f(2 \times 0 - x) = 2 \times 1 - f(x)$, ou encore : $f(x) + f(-x) = 2$.

   c. $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$, $f(-x) = -x + 1 + \varphi(-x)$ donc $f(x) + f(-x) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x)$.
   Or, on sait que $f(x) + f(-x) = 2$, on en déduit que $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$, ou encore que $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, c'est-à-dire que la fonction φ est impaire.
   d. $f(x) + f(-x) = 2$, donc, en dérivant chaque terme : $f'(x) - f'(-x) = 0$, soit $f'(x) = f'(-x)$.
   Conclusion : f' est paire. Attention, la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$
   (dérivée des fonctions composées).
3. a. $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2} \Rightarrow \varphi(-x) = (-ax+b)e^{-x^2}$; comme φ est impaire, on a $ax + b = -ax + b$, soit $b = 0$.
   b. $f(x) = x + 1 + \varphi(x) = x + 1 + axe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \varphi'(x) = 1 + ae^{-x^2} + (ax)(-2x)e^{-x^2} = 1 + a(1-2x^2)e^{-x^2}$.
   c. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, soit J, est $f'(0) = (1 - e)$ (équation de (T)). On a donc l'égalité : $f'(0) = 1 + a = 1 - e \Rightarrow a = -e$.
   d. Il reste à conclure : $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2} = x + 1 - exe^{-x^2}$.