4Sc. $exp_1$

# Devoir de Contrôle n°2

## Exercice 1 :

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1.) Soit $\alpha$ un reel et on designe par (E) l'équation : $z^2 - (1 + 2\cos\alpha)z + 1 + \cos\alpha - i\sin\alpha = 0$

a. Vérifier que : $4\cos^2\alpha + 4i\sin\alpha - 3 = (1 + 2i\sin\alpha)^2$

b. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2.) Soient A et B deux points d'affixes respectives : $z_A = e^{-i\alpha}$ et $z_B = 1 + e^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

a. Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ puis déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

b. Déterminer alors $\alpha$ pour que le triangle OAB soit rectangle en O.

3.) Soit C le symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

a. Vérifier $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin(\alpha)$.

b. Déduire l'affixe du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.

c. Déterminer $\alpha$ pour que ACBD soit un carré.

## Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

1.) Dresser le tableau de variations de f.

2.) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$ et que $\alpha \in \left]\frac{2}{3}; 1\right[$

3.) Soit $(U_n)$ la suite réelle définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n); n \in IN \end{cases}$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $\frac{2}{3} \leq U_n \leq 1$

b. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{5}{9}$

c. En déduire que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{9}|U_n - \alpha|$

d. Montrer alors que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{9}\right)^n |1 - \alpha|$

e. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

## Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ par f(x) = $\sqrt{\tan x}$

1.) a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Interpréter graphiquement le résultat.

2.) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ sur $[0\ ;+\infty[$ .

3)montrer que $f^{-1}$ est derivable sur$[0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x$\in[0\ ;+\infty[$ ,$\tan\left(f^{-1}(x)\right)=x^2$

c. Déterminer alors l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout x $\in[0\ ;+\infty[$.

.

CORRECTION( proposée par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

**1)a)** $(\mathbf{1}+\mathbf{2}\boldsymbol{isin\alpha})^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}+\mathbf{4}\boldsymbol{isin\alpha}-\mathbf{4}\boldsymbol{sin^2\alpha}+\mathbf{4}-\mathbf{4}=-\mathbf{3}+\mathbf{4}\boldsymbol{isin\alpha}+\mathbf{4}(\mathbf{1}-\boldsymbol{sin^2\alpha})$

$=\mathbf{4}\boldsymbol{cos^2\alpha}+\mathbf{4}\boldsymbol{isin\alpha}-\mathbf{3}$

b)$\Delta=(1+2cos\alpha)^2-4(1+cos\alpha-isin\alpha)=1+4cos^2\alpha+4cos\alpha-4-4cos\alpha+4isin\alpha=4cos^2\alpha+4isin\alpha-3=(1+2isin\alpha)^2\ \ donc\ z=\frac{1+2cos\alpha-1-2isin\alpha}{2}$

$=e^{-i\alpha}\ \ ou\ z=1+e^{i\alpha}$

2)$on\ a\ :2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}=2\left(\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{\frac{-i\alpha}{2}}}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}=1+e^{i\alpha}$ (developper mieux que factoriser)

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{e^{-i\alpha}}{(1+e^{i\alpha})}=\frac{1}{2cos\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{3i\alpha}{2}}$

b)$OAB\ est\ rectangle\ en\ O\Leftrightarrow\frac{z_A}{z_B}\ \ imaginaire\ pur\Leftrightarrow\frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cos\left(3\frac{\alpha}{2}\right)=0\Leftrightarrow$

$$cos3\frac{\alpha}{2}=O\ donc\ \frac{3\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi;k\epsilon IZ\ ou\ \frac{3\alpha}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ \ \Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}k\pi\ ou$$

$\alpha=-\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}k\pi\ \ et\ \alpha\neq\pi+2k\pi$

3)$a)on\ a\ :z_C=\overline{z_A}\ \ donc\ \frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}{1+e^{i\alpha}-e^{i\alpha}}=-2isin\alpha\ (FORMULE\ D'EULER)$

$b)ACBD\ est\ un\ rectangle\ si\ (CB)perpendiculaire$ à $(CA)\ qui\ est\ le\ cas\ et\ quez_{\overrightarrow{AC}}=z_{\overrightarrow{DB}}\ \ \Leftrightarrow z_C-z_A=z_B-z_D\Leftrightarrow z_D=z_B+z_A-z_C=e^{-i\alpha}+1+e^{i\alpha}-e^{i\alpha}=1+e^{-i\alpha}=\overline{z_B}$

$c)ACBD\ est\ un\ carre\ \ si\ CA=CB\ \ \Leftrightarrow|sin\alpha|=1\ d'ou$

$\alpha\equiv\frac{\pi}{6}ou-\frac{-\pi}{6}ou\frac{5\pi}{6}ou-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

**EXERCICE2**

1)$f$ *est derivavle sur IR (fonction rationnelle )et* $f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$

| X | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | - | 0 | + | |
| f(x) | 1 | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | $\frac{2}{3}$ | $\nearrow$ | 1 |

2)*soit la fonction* $g(x) = f(x) - x$ , $g$ *continue sur IR et* $g'(x) = f'(x) - 1 =$

$-\frac{(x^4+2x^3+2x^2+2x+2)}{(x^2+x+1)^2} < 0$ *donc g est strictement decroissante donc l'equation*

$g(x) = 0$ *admet exactement une solution* $\alpha$ *et puisque* $g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{57}$ ;

$g(1) = -1$ *donc* $g\left(\frac{2}{3}\right) \times g(1) < 0$ *donc l'équation*

$g(x) = 0$ *admet une seule solution* $\alpha$ *telle que* $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha; \alpha \in ]2/3; 1[$

3)a) *pour* $n = 0$ *on a* : $\frac{2}{3} \leq 1 \leq 1$ *vrai supposons que pour* $n \geq 1$ ;

$\frac{2}{3} \leq u_n \leq 1$ ; *sur cet intervalle f est decroissante donc* $f(1) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{2}{3}\right)$

$\Leftrightarrow$

$\frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{57} \leq 1$ *donc le resultat est vrai pour n*

b)*pour* $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ *on a* : $\frac{1}{9} \leq f'(x) \leq$
$\frac{9}{19}$ *d'ou le resultat (par majoration et minoration)*

*on peut aussi retrouver*

*le resultat en faisant la difference* $f'(x) - \frac{5}{9}$ *et* $f'(x) - (-\frac{5}{9})$

$c)\ d'apresl'inégalite\ du\ TAF\ \ sur\ ]u_n;\alpha[\ ;\ \frac{|f(u_n)-f(\alpha)|}{|u_n-\alpha|} \leq \frac{5}{9}\ et$

$vu\ que\ f(\alpha) = \alpha\ et\ donc\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{9}|u_n - \alpha|$

d)$on\ a\ :\ \ |u_n - \alpha| \leq \frac{5}{9}|u_{n-1} - \alpha|$

…………………………………………..

…………………………………………

$|u_1 - \alpha| \leq \frac{5}{9}|1 - \alpha| \qquad car\ u_0 = 1\ ;en\ multipliant\ membre\ a\ membre$

$et\ apres\ simplification\ on\ a\ :\ |u_n - \alpha| \leq (\frac{5}{9})^n|1 - \alpha|\ \ ;(les\ termes\ sont\ positifs)$

e)$on\ a\ :-1 < \frac{5}{9} < 1\ \ \ donc\ \ \lim_{n\to+\infty}|u_n - \alpha| = 0\ donc\ \ \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

**EXERCICE3**

1)$a)\lim_{x\to0^+} f(x) = \ \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{tanx}}{x} = \lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{sinx}{x}}.\frac{1}{\sqrt{xcosx}} = +\infty\ \Leftrightarrow$
$f\ n'estpas\ derivable\ a\ \ droite\ en\ 0$

$b)\ la\ droite\ D{:}\,x = 0\ est\ une\ asymptote\ a\ la\ courbe\ (C)de\ f\ au\ voisinage\ de + \infty$

2)$sur\ ]0\ ;\frac{\pi}{2}[\ f\ est\ le\ quotient\ de\ deux\ fonctions\ derivable\ donc\ derivable\ \ et$

$f'(x) = \frac{1+tan^2x}{2\sqrt{tanx}} > 0$

| x | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| f '(x) | | + | |
| f(x) | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

f est continue et strictement croissante sur$[0;\frac{\pi}{2}[$ *donc elle realise une bijection sur*$[0;+\infty[$

$3)a) f$ *est derivable sur* $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ donc$f^{-1}$ *est derivable sur* $[0;+\infty[$

$b)$*on a* : $f^2(x) = tanx$ *donc* $f(f^{-1}(x))^2 = \tan\big(f^{-1}(x)\big) \Leftrightarrow x^2 = \tan(f^{-1}(x))$ (I)

c)*en derivant les deux membres de* $(I)$ *on a* : $2x = (f^{-1})'(x)\big(1+\tan(f^{-1})\,(x)\big) = (f^{-1})'(x)[1+x^2]$ *alors* $(f^{-1})'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$