Classe : 4^{eme} *année*

Devoir de contrôle N°2

Section : Sciences Expérimentales
Epreuve : Mathématiques

Durée : 2h **Coefficient : 3**

EXERCICE N° 1 (3 Pts)

Indiquer la réponse exacte

1 °) On donne le plan P : $-4x + 2y + 4z + 1 = 0$ et S une sphère de centre $I(1 , -\frac{1}{2} , 1)$ et de rayon 3 alors on a l'intersection de P et S est

a °) le vide ; b °) le point I ; c °) le cercle (C) de centre I et de rayon 3

2 °) La courbe représentative d'une fonction monotone f coupe l'axe des abscisses en un point A(3,0) ; F une primitive de f alors on a nécessairement

a °) F admet un extremum en 3 ; b°) F(3)=0 ; c °) A est un point d'inflextion pour la courbe de F

3 °) Une primitive F sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f définie par : $f (x) = \sqrt{x}$ alors on a :

a °) $F (x) = 2\sqrt{x}$; b °) $F (x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$; c °) $F (x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE N° 2 (6 Pts)

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O , \vec{I} , \vec{J} , \vec{K})$

On considère le tétraèdre ABCE tel que A (1 , 0 , 2) ; B (2 , 3 , 1); C (-1 , 1 , 2) et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

1°) a°) Verifier que E à pour coordonnées (2 , 2 , 9)

b°) Calculer le volume du tétraèdre ABCE

c°) Calculer l'aire du triangle ABC

d°) En déduire que la distance entre E et le plan (ABC) est $3\sqrt{6}$

2°) Soit P le plan d'équation : $x + 2y + 7z - 1 = 0$. Montrer que P est parallele (ABC)

3 °) Soit S l'ensemble des points M (x , y , z) tel que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 18z + 25 = 0$$

a °) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon

b °) Déterminer l'intersection de la sphère S et (ABC)

EXERCICE N° 3 (5.5 Pts)

Soit f la fonction définie sur $]-1 , 1[$ par : $f (x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

1 °) Prouver l'existance et l'unicité d'une primitive F de la fonction f tel que $F(0) = \frac{\pi}{2}$

2 °) Soit H l'application définie sur $] 0 , \pi [$ par: $H (x) = F (\cos x)$

a °) Calculer $H (\frac{\pi}{2})$

b °) Montrer que H est dérivable sur $]0,\pi[$ et calculer H' (x)

c °) En déduire que pour tout x de $]0,\pi[$ on a H(x) = x

d °) Calculer F ($\frac{1}{2}$)

3 °) On pose pour tout x de $]-1,1[$, K (x) = F (x) + F (-x)

a °) Montrer que K est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer K ' (x)

b °) En déduire que pour tout x de $]-1,1[$ on a K (x) = π

EXERCICE N° 4 (5.5 Pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

1°) a°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b°) En déduire que D : y = x - 1 et D : y = -x +1 sont deux asymptotes obliques pour la courbe de f

2 °) Etudier les variations de f

3 °) Montrer que la droite Δ : x = 1 est un axe de symetrie pour la courbe de f

4 °) Construire la courbe de de f dans un repère orthonormé $(O , \vec{I} , \vec{J})$

5°) Soit g la restricution de f sur $[1,+\infty[$

a°) Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$

b°) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$

c°) Expliciter $g^{-1}(x)$ puis(g^{-1})'(x)

d°) Construire la courbe de g^{-1}

BONNE CHANCE

CORRECTION(proposée par le pro f:Guesmi.B)

EXERCICE1

1)c 2)a 3)b

EXERCICE2

1)$a)\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\2\\7\end{pmatrix}$

$on\ a: 2-1=1; 2-0=2\ et 9-2=7\ donc\ E(2,2,9)$

b)$V=\frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{6}\times 54=9(unite\ de\ volume)$

c)$aire(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+7^2}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$

d)$on\ a: V=\frac{1}{3}aire(ABC)\times h\ (h: hauteur\ du\ tetraedre=d\big(E;(ABC)\big)=\Delta$

$donc\frac{3}{2}\sqrt{6}\times\frac{1}{3}h=9\Rightarrow h=\frac{18}{\sqrt{6}}=\frac{3\times 6}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$

2)$soit\ Q=(ABC): x+2y+7z+a=0\big(\overrightarrow{AE}\ vecteur\ normal$ à $Q\big)et\ A\in Q$

$\Rightarrow 1+0+7\times 2+a=0\Rightarrow a=-15$

$\Rightarrow Q: x+2y+7z-15=0\ et\ P: x+2y+7z-1=0\ ; P\ et\ Q$

$ont\ le\ meme\ vecteur\ normal\ \Rightarrow$ P//Q (stictement car -1$\neq -15$)

3)a)S :$(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+(z-9)^2-81+25=0$

$\Leftrightarrow$S :$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-9)^2=8^2$; c'est une sphere de centre E et de rayon R=8

b)on
a :$\Delta=3\sqrt{6}<R\ donc\ \ Q\ coupe\ S\ suivant\ un\ cerle\ de\ centre\ le\ projete\ orthogonal\ de$

$E\ sur\ Q\ et\ de\ rayon\ r=\sqrt{R^2-\Delta^2}=\sqrt{10}\ soit\ I\ le\ centre\ du\ cercle\ \Rightarrow$
$\overrightarrow{AE}\ et\ \overrightarrow{IE}\ sont\ colineaires\ et\ de\ meme\ sens\ \Rightarrow I=A$

EXERCICE3

1)f continue sur]-1 ;1[donc f admet une primitive f a une constante pres et

Puisque $F(0) = \frac{\pi}{2}$ $donc\ l'unicite$

$2)a)H\left(\frac{\pi}{2}\right) = F\left(cos\frac{\pi}{2}\right) = F(0) = \frac{\pi}{2}$

b)H est la composee de deux fonctions derivables donc derivable

H'(x)=F'(cosx).(cosx)'=f(cosx)× $(-sinx) = -sinx \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-cos^2x}}\right) =$

$sinx \times \frac{1}{sinx} = 1$; $x \in]0;\pi[$ $sinx > 0$

H'(x)=1

c) d'pares b) H(x)=x+c et $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow H(x) = x$

d)$H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} = F\left(cos\frac{\pi}{3}\right) = F(\frac{1}{2})$

3)a) K est la somme de deux fonctions derivables donc derivable sur]-1,1[

K'(x)=F'(x)-F'(-x)=f(x)-f(-x)=0

b) K'(x)=0 donc K(x)=a ;or K(0)=a=2F(0)=π⇒K(x)=π

EXERCICE4

1)a)$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;\; et \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

b)$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}+x-1} = 0 \; donc$

$D: y = x - 1 \; est \; asymptote \; a \; la \; courbe \; au \; voisinage \; de + \infty \;\; on \; montr \; de \; meme \; que$

$D': y = -x + 1 \; est \; asymptote \; a \; la \; courbe \; au \; voisinage \; de - \infty$

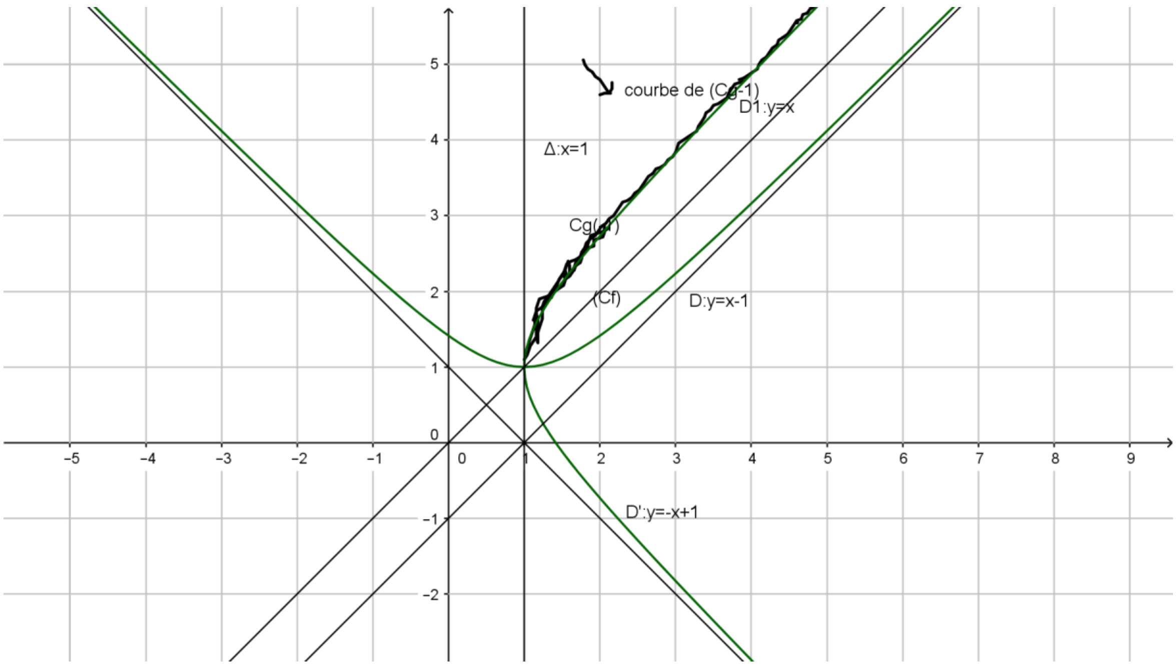
2)$f \; est \; derivable \; sur IR \; et \; f'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x^2-2x+2}}$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) on a si $x \in IR \Rightarrow 2\times 1 - x \in IR$ $\; f(2-x) = \sqrt{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2} =$

$\sqrt{x^2-2x+2} = f(x) donc \; la \; droite \; \Delta: x = 1 \; est \; un \; axe \; de \; symetrie \; de \; (C)$

4)



5)a)g est continue et strictement croissante sur$I=[1\ ;+\infty[$ donc realise une bijection

De I sur I

b) pour tout $x\in]1,+\infty[$ g est derivable et $g'(x)\neq 0$ donc f^{-1} l'est aussi

c)posons $y=g^{-1}(x)$;$x\in I$ et $y\in I \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow x^2=y^2-2y+2 \Leftrightarrow y^2-2y+2-x^2=0$

$\Delta=4-4(2-x^2)=4(x^2-1)>0$ donc

$y=\frac{2-2\sqrt{x^2-1}}{2} = 1-\sqrt{x^2-1} < 1\ , ne\ convient\ pas\ donc\ y\ est\ l'autre\ solution$

$a\ savoir\ y = g^{-1}(x) = 1+\sqrt{x^2-1}$ donc $(g^{-1})'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

d)la courbe de Cg^{-1} est la symetrique de Cg par rapport à D_1 :y=x