Année Scolaire : **2015 – 2016**	**Devoir de contrôle n°2** Épreuve : **Mathématiques**		
Section : $4^{ème}$ **Sciences expérimentales**	Durée : **2h**	Coef. : **3**	

L'Épreuve comporte deux pages numérotées de 1/2 à 2/2.
Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. Le barème est approximatif.

Exercice 1 (3 points)

I. Indiquer, le justifiant, la réponse exacte :

1) Soit les points non alignés A, B et C de l'espace muni d'un repère orthonormé direct, l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$ est :

a- Le plan perpendiculaire à la droite (AB) et passant par A.
b- La droite (AB).
c- {A;B}.

2) L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) . \overrightarrow{AM} = 0$ est :

a- Le plan (ABC).
b- La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
c- La droite (AB).

3) Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + \sqrt{x+1}$ et C_f sa courbe représentative :

a- La droite y = 2x est une asymptote pour C_f au voisinage de $+\infty$.
b- La droite y = 2x est une direction asymptotique pour C_f.
c- C_f admet une branche parabolique de direction $\left(O , \vec{j}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

II. Répondre, en le justifiant, par vrai ou faux :

1) Soit f une bijection et soit f(a)=b, si f est dérivable en a alors f^{-1} est dérivable en b et on a : $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
2) Soit le plan P : 2x – y + z – 2 = 0 et soit les points A(-2, 1, 1) , B(2, -1, 3), alors (AB) $\perp$ P.
3) Soit les plans : P :x + y – 1 = 0 et Q : y + z – 1 = 0 ; alors P // Q .

Exercice 2 (3 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{2\cos x - 1}$.

1. a/ Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b/ Étudier la parité de f et vérifier que 2π est une période de f.
2. a/ Étudier les variations de f sur l'intervalle $I = [0 ; \pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$.

b/ Calculer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^+} f(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur I.

3. Tracer le graphe de f sur I.

Exercice 3 (7 points)

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ et soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan.

1. a/ Étudier la fonction g.

b/ justifier qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

a/ Dresser le tableau de variation de h.

b/ Déterminer les asymptotes à la courbe de C_h.

c/ Déterminer la position de C_h par rapport à ses asymptotes et tracer le graphe de h dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3. a/ Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

b/ Montrer que : $h^{-1}(x) = \frac{1}{4x-4} + 1 - x$.

c/ Tracer le graphe de $C_{h^{-1}}$.

Exercice 4 (7 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit les points A(1,0,2), B(3,1,0), C(1,-1,3) et D(-1,1,0).

1) **a/** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b/ En déduire une équation du plan P=(ABC).

2) **a/** Donner une représentation paramétrique du plan Q tel que Q // P est passant par D.

b/ Calculer d(A,Q)

3) **a/** Calculer l'aire de triangle ABC.

b/ En déduire le volume de tétraèdre ABCD.

4) Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan P.

a/ Calculer la distance DH.

b/ Donner une représentation paramétrique de la droite (DH).

c/ Déterminer les coordonnées du point H.

FIN DE L'ÉPREUVE

CORRECTION(proposée par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

I)1)$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0} \Leftrightarrow A; B\ et\ M\ sont\ alignes\ d'ou\ l'ensemble\ cherche\ est\ (AB)\ (b)$

2)$M \in (ABC)\ de\ vecteur\ normal\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{u}\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\quad (a)$

3)$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2\ donc\ la\ droite\ \Delta: y=2x\ est\ une\ direction\ asymptotique\quad (a)$

II)1) $f(a)=b \Leftrightarrow a=f^{-1}(b)\ d'ou\ (f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1})(b)}=\frac{1}{f'(a)}\quad vrai$

2)$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\ et\ \vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} un\ vecteur\ normal\ a\ P\ ; on\ a: \frac{2}{2}=-\frac{2}{-1}=$
$\frac{2}{1}\ donc\ \overrightarrow{AB}\ et\ \vec{n}\ colineaires\ et\ alors\ (AB) perpendiculaire$ à $P\quad (vrai)$

3)$on\ a: \frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}\ donc\ P\ et\ Q\ ne\ sont\ pas\ parallele\ \ (Faux)$

EXERCICE2

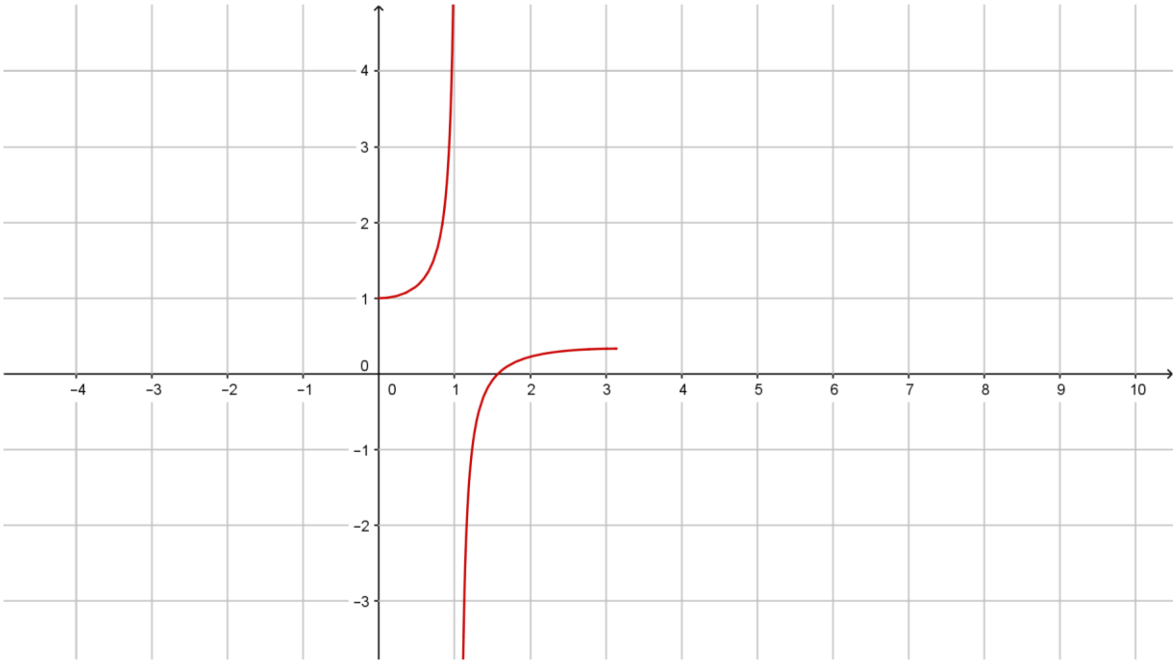
1)$a)cosx\neq\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{3}+2k\pi\ \ et\ x\neq-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in IZ$

b)$b)si\ \in D_f\ alors -x\in D_f\ et\ f(-x)=$
$f(x)\ donc\ f\ est\ paire\ (\cos(-x)=cosx) et\ f(x+2\pi)=f(x)\ donc\ 2\pi\ est\ une\ periode$

2)a) $f'(x) = \frac{sinx}{(2cosx-1)^2} > 0 \; sur[0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f '(x)		+	||	+	
f(x)	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1/3

3)



EXERCICE3

1)a) $g \text{ est derivable sur } IR \text{ et } g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
g '(x)		+	
g(x)	-1	↗	0

b) g est continue et strictement croissante sur IR donc realise une bijection de IR sur J=[-1 ;0]

2)h est derivable sur IR et h'(x)=$-\frac{1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}=g(x)\leq 0(voir\ 1)a))$

a)

x	$-\infty$		$+\infty$
h'(x)		-	
h(x)	$+\infty$	$\searrow$	1

$h(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}+x-2}\right]$ $(expression\ conjugué) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} h(x)=1$ ⇒D :y=1 est une asymptote a la courbe (C_h) au voisinage de $+\infty$

b)$\lim_{x\to-\infty} h(x)—(-x+1)=0\ donc$

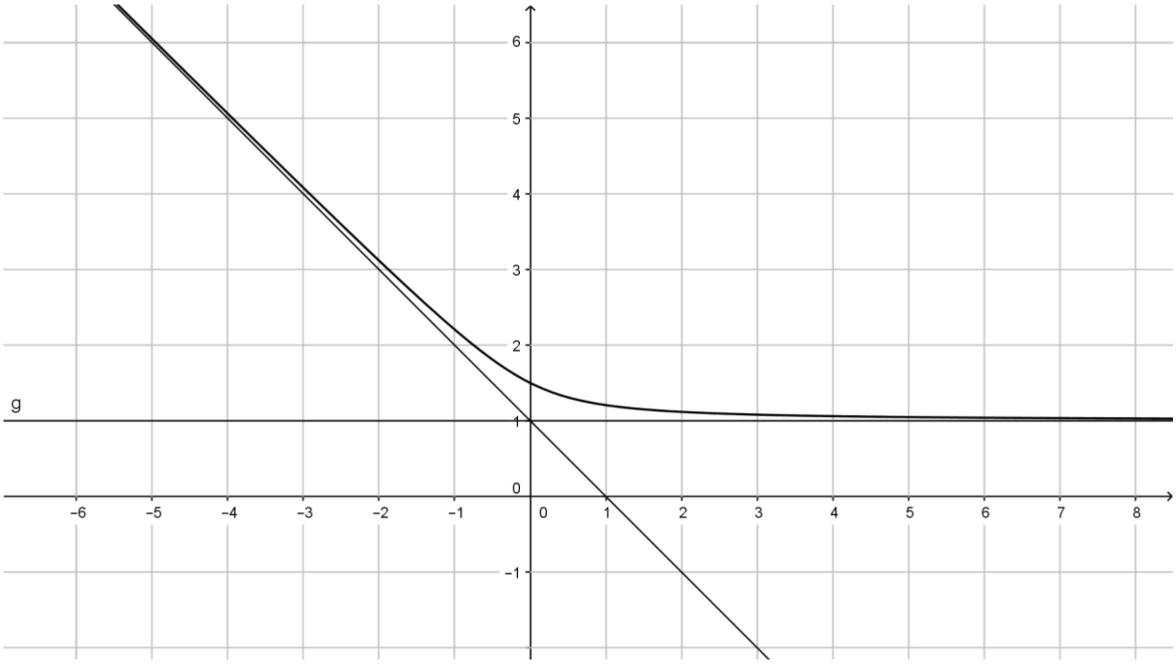
$D': y=-x+1\ est\ une\ asymptote\ à\ la\ courbe\ C_h\ au\ voisinage\ de-\infty$

c) soit k(x)=h(x)-1=$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} \Rightarrow k(x)\geq 0$ (x>0)

donc $et\ alors\ C_h\ est\ toujours\ au\ dessus\ de\ D: y=1$

Soit p(x)=h(x)-(-x+1)=$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ >0 (x<0)

donc $C_h\ est\ au\ dessus\ de\ D': y=-x+1$



3)a)h est continue strictement decroissante surIR donc elle realise une bijection

De IR sur J=]1 ;+∞[

b)soit y=h^{-1}(x) ;x>1 ⇔x=h(y)=$\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2+1}+(2-y)\right) \Leftrightarrow 2x+y-2=\sqrt{y^2+1} \Leftrightarrow$
$y^2+1=4x^2+y^2+4+2(2xy-4x-2y) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4x-4}+1-x$

C)C_h^{-1} *est la symetrique de* C_h *par rapport* à $y = x$

EXERCICE4

1)$a)\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix};\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ *donc A; B et C ne sont pas alignes*

b)$M \in P=(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow -(x-1)-2y-2(z-2)=0$(methode simple)

$\Leftrightarrow -x-2y-2z+5=0 \Leftrightarrow P: x+2y+2z-5=0$

2)a) Q//P ⇒Q :x+2y+2z+a=0 et D∈Q⇒-1+2× $(1)+2\times 0+a=O$⇒a=-1

⇒Q :x+2y+2z-1=0

b)$d(A;Q) = \frac{|1+0+4-1|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$

3)a)$aire(ABC) = \frac{1}{2}\|\vec{n}\| = \frac{1}{2}\sqrt{9} = \frac{3}{2}$

b)$V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB};;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right| = \frac{4}{6}$ (unite de volume)

4)a)H est le projeté orthogonal de D surP donc DH =h (hauteur du tetraedreABCD)

Donc $V = \frac{1}{3}aire(ABC).h\ d'ou\ h = \frac{3V}{\frac{3}{2}} = 2V = \frac{4}{3}$

b)$\overrightarrow{DH}$ *et* $\vec{n}$ *sont colineaires et* $H \in P \Rightarrow \begin{cases} x_H + 1 = -\alpha \\ y_H - 1 = -2\alpha \\ z_H = -2\alpha \end{cases} ;x_H + 2y_H + 2z_H - 5 =$

0 *donc* $\Rightarrow \alpha = -\frac{4}{9}$ *et donc* $H\left(-\frac{5}{9};\frac{17}{9};\frac{8}{9}\right)$ *s'il j'ai pas cmmis d'erreursde calcul*