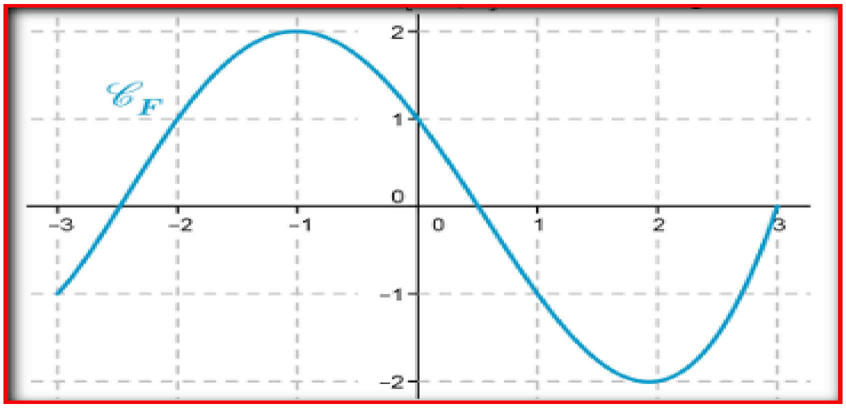
Devoir de synthése :n°2

Classase : $4SC_1$ | Durée : $3h$ | Le 04 / 03 / 2015

EXERCICE $1(3pts)$

Soit f une fonction définie sur $[-3,3]$ et F une primitive de f . On a tracé la courbe de F ci-dessous:



1. Déterminer le tableau de signe de f sur $[-3,3]$.

2. Déterminer la valeur $\int_1^3 f(x)dx$.

EXERCICE $2(6pts)$

Partie A

Soit g la fonction défine sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$.

1. Etudier le sens de variation de g.

2. Montrer que $g(x) > 0$,$\forall\ x \in\ ]0,+\infty[$

Partie B

Soit f la fonction défine sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x^2-1}{2x}$

1. (a) Calculer $f(1)$

   (b) Montrer que $f(e) = \dfrac{e^2+1}{2e}$.

2. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.Interpéter graphiquement ce résultat.

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

   (b) Dresser le tableau de variation de f.

4. (a) Montrer que $\forall\ x \in\ ]0,+\infty[,\ \ f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{2x}$

   (b) En déduire que la droite $\triangle : y = \dfrac{1}{2}x$ est une asymptote oblique à ζ_f.

5. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique $\alpha \in\ ]3,4[$

(b) Déterminer une équation de la tangente T à ζ_f au point d'abscisse 1.

(c) Tracer ζ_f , T et les asymtotes à ζ_f dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'unité graphique $2cm$.

6. Calculer, en cm^2,l'aire du domaine du plan limitée ζ_f , $\triangle$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

EXERCICE 3 ($5pts$)

Soient les intégrales suivantes: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$

1. Soients f la fonction féfinie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$

   (a) montrer que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

   (b) En déduire que $I = \frac{\ln\left(\sqrt{3}+2\right)}{2}$

2. (a) Vérifier que $J + 2I = K$

   (b) Montrer que $K = \sqrt{3} - J$ (On pourra faire une intégration par parties)

   (c) En déduire les valeurs de J et K.

EXERCICE 4 ($6pts$)

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ 3 un repère orthonormé directe et les points $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, 2)$ et $C(0, 2, 0)$.

1. (a) Faire une figure

   (b) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

   (c) Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y + z - 2 = 0$.

2. (a) Le tétraèdre $OABC$ est-il régulier ?

   (b) Calculer son volume ϑ.

3. soit Q le plan passant par le milieu de $[AC]$ et perpendiculaire à (BC).

   (a) Montrer que $Q : y - z - 1 = 0$

   (b) Montrer que $Q \perp (ABC)$.

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de $\Delta = Q \cap (ABC)$.

4. Soit $S = \{M(x, y, z)\,;\; x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0\}$.

   (a) Montrer que S est la sphère de de diamètre $[BC]$.

   (b) Montrer que S et Q sont sécants suivant un cercle ξ que l'on caractérisera.

Exercice 1 :

(1)

1°) $F(x)$ croissante sur $[-3,-1] \cup [2,3]$

$\Leftrightarrow F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-3,-1] \cup [2,3]$

et $\quad f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [-1,2]$

2°) $\int_1^3 f(x)\,dx = F(3) - F(1)$

$= 0 - (-1) = 1$

Exercice 2 : $\quad g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x \quad \forall x > 0$

A) 1) g est derivable $\forall x > 0$ et $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(x^2 - 1)$

$\Longrightarrow$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	ϕ	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

$g(1) = 4$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 + \frac{3}{x^2} - \ldots\right)$

$= +\infty$

on remarque que

2°) $\forall x > 0 \quad g(x) \geq 4 > 0$

B) $\quad \forall x > 0 \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}$

1°) a) $f(1) = 0$

b) $\quad f(e) = \frac{1}{e} + \frac{e^2 - 1}{2e} = \frac{\cancel{2}}{2e}\left(1 + e^{2}\right)$

$= \frac{1 + e^2}{2e}$

2°) a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}\left(\ln x + \frac{x^2 - 1}{2}\right)$

$= +\infty \times (-\infty) = -\infty \Rightarrow \Delta : x = 0$ asymptote

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$

3°) a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

$= \dfrac{1 - \ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$

$= \dfrac{2 - 2\ln x + x^2 + 1}{2x^2}$

$= \dfrac{-2\ln x + x^2 + 3}{2x^2} = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

b) puisque d'aprés A) 2) $g(x) > 0 \ \forall x > 0$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \ \forall x > 0$

$\Rightarrow$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4°) a) $f(x) - \dfrac{1}{2}x = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}x$

$= \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \dfrac{1}{2}x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{2x}\right) = 0$

$\Rightarrow \Delta : y = \dfrac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

5°) a) f continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $2 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(3) = \dfrac{\ln 3}{3} + \dfrac{4}{3} \simeq 1,69$

$f(4) = \dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{15}{8} \simeq 2,22$

$\Rightarrow f(x) = 2$ admet une seule solution dans $]3, 4[$.

b) $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \left(\ln(x+\sqrt{x^2+2})\right)' dx$ (3)

$= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \ln(1+\sqrt{3}) - \ln\sqrt{2}$.

$= \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(1+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\ln 2$

$= \frac{\ln\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - \ln 2}{2} = \frac{\ln\left(\frac{1+3+2\sqrt{3}}{2}\right)}{2}$

$= \frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$.

2°) a) $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+2}\right) dx = K$. (1)

$$k = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$$

4

$u' = 1 \Rightarrow u = x$

$v = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\Rightarrow K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\, dx$

$\boxed{K = \sqrt{3} - J}$ (2)

on a : $\begin{cases} J + 2I = k \\ \sqrt{3} - J = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J + 2I = \sqrt{3} - J \\ k = \sqrt{3} - J \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} I + J = \sqrt{3}/2 \\ k = \sqrt{3} - J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \\ k = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + I \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} J = \sqrt{3}/2 - \frac{\ln(\sqrt{3}+2)}{2} \\ K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{3}+2)}{2} \end{cases}$

Exercice 4 ;

1°) a) repere.

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \vec{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow$ A, B et C non alignés.

5

soit $\vec{n} = -\frac{1}{2}\vec{AB}\wedge\vec{AC} \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

est un vecteur normal à $P = (ABC)$

$M \in P \iff \vec{AM} \perp \vec{n}$

$\iff \vec{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\iff \begin{pmatrix}x-2\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \iff x-2+y+z=0$

$\iff P : x+y+z-2=0$

autre façon : P est de la forme

$ax+by+cz+\alpha=0$ $\quad a=b=c=1$ (composante de $\vec{n}$).

$\Rightarrow P : x+y+z+\alpha=0$, $A \in P$

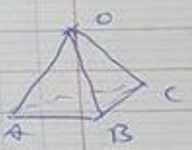
$\Rightarrow 2+0+0+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-2$

$\Rightarrow P : x+y+z-2=0$

autre façons : $M \in P$

$\iff \det(\vec{AM},\vec{AB},\vec{AC}) = 0 \iff \begin{vmatrix}x-2 & -2 & -2\\ y & 0 & 2\\ z & 2 & 0\end{vmatrix} = 0$

$\iff P : x+y+z-2=0$



2°) a) $OA=2$, $OB=2$, $OC=2$

$\|\vec{AB}\| = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ ABC n'est pas régulier

b) $V = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{OA},\vec{OB},\vec{OC})\right| = 8/6 = 4/3$ (unité de volume)

$\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix} = 2\times(-4) = -8$

⑥

3°) a) $Q \perp (BC) \Rightarrow \overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à Q, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow Q : 2y - 2z + \beta = 0$ et soit $I = A * C$

$\Rightarrow I(1,1,0)$, $I \in Q \Rightarrow 2 + \beta = 0$

$\Rightarrow \beta = -2$

$\Rightarrow \boxed{Q : y - z - 1 = 0}$. soit $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

un vecteur normal à Q.

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal à P.

$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}$.

$\Rightarrow P \perp Q$.

c) soit $\Delta = P \cap Q$

$\Rightarrow \Delta : \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \\ z = \alpha \quad , \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta : \begin{cases} x = -\alpha - \alpha - 1 + 2 \\ y = \alpha + 1 \quad , \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta : \begin{cases} x = -2\alpha + 1 \\ y = \alpha + 1 \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de Δ

Je dis bien une (il y a d'autre).

4°) $S : x^2+y^2+z^2-2y-2z=0$ (7)

a) $S : (x^2)+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=0$

$\Leftrightarrow S : x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{2})^2$

S est une sphère de centre $J(0,1,1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$

soit $K=B*C \Rightarrow K\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$

$\Rightarrow K(0,1,1) \Rightarrow K=J$ milieu de $[BC]$.

$\Rightarrow S$ est la sphère de diamètre $[BC]$.

b) $d(J,Q) = \frac{|0+1-1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}=R$

$\Rightarrow Q$ coupe S en un cercle de centre H projeté orthogonal de J sur Q. et de rayon $r=\sqrt{R^2-JH^2}$

on a : $\vec{JH}$ et $\vec{u}$ colinéaire et $H \in Q$.

$JH = d(J,Q) = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \alpha \times 0 \\ y_H - 1 = \alpha \\ z_H - 1 = -\alpha \\ 0+(\alpha-1)-(1-\alpha)-1=0 \Leftrightarrow H \in Q. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 5/2 \\ z_H = -1/2 \end{cases} \Rightarrow H(0, 5/2, -1/2)$$

$\alpha = 3/2$

$r = \sqrt{2-\frac{1}{2}} = \sqrt{3/2}$

s'il n'y a pas d'erreurs de calcul