DEVOIR DE SYNTHESE N° 3	**SECTIONS :** 4^{éme} *Sciences Expérimentales* **1** **EPREUVE :** *Mathématiques* **DUREE :** 3 *heures*

<u>EXERCICE N° 1</u>: (3 points)

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à recopier sur la copie cette réponse exacte sans justification.

BAREME : *Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.*
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$. La variance de X est égale à :

a) 1 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

2. Une variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur l'intervalle [0,1]. $p\left(0,3 \le Y \le 0,5\right)$ est égale à :

a) 0,3 b) 0,5 c) 0,2

3. Si Z est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,1 alors l'arrondi au centième de $p\left(Z \ge 10\right)$ est :

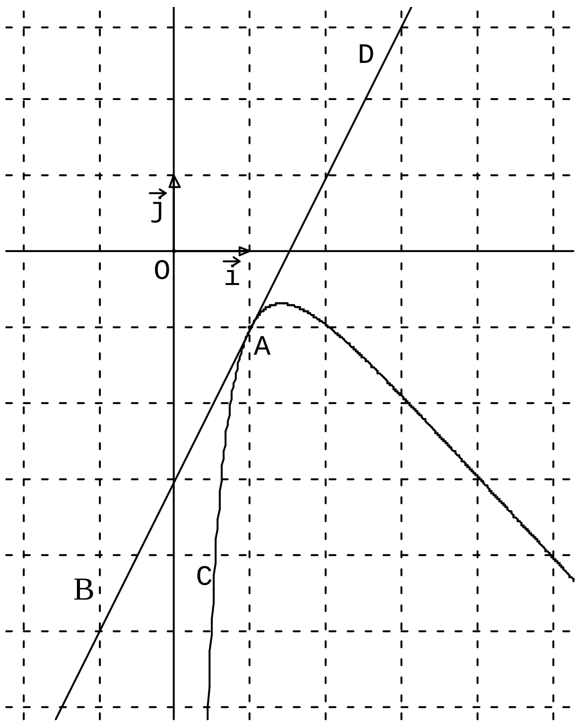
a) O,63 b) 0,37 c) 0,91

<u>EXERCICE N° 2</u>: (4 points)

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ci-contre, la courbe (C) représente la fonction *f* définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par

$f(x) = ax + b\frac{\ln x}{x}$ où *a* et *b* sont deux réels.

La droite D est tangente à (C) au point A(1 , –1). Elle passe par le point B(–1 , –5).



1. Déterminer, à l'aide du graphique, $f(1)$ et $f'(1)$.

2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de *a* et *b*.

3. Déterminer les réels *a* et *b*.

4. On admet que $f(x) = -x + 3\frac{\ln x}{x}$

a. Déterminer la limite de *f* à droite en 0.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

b. Montrer que la courbe (C) admet la droite Δ d'équation *y* = –*x* comme asymptote en $+\infty$

5. Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par (C), Δ et les droites d'équations *x* = 1 et *x* = e

<u>EXERCICE N° 3</u>: (4 points)

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$

1. En utilisant une intégration par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$

   b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante.

   c) En déduire que (I_n) est une suite convergente
3. a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1-x)^n e^x \leq (1-x)^n e$

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

   c) Déterminer alors la limite de la suite (I_n)

<u>EXERCICE N° 4</u>: (5 points)

Une petite entreprise de textile commercialise des pantalons et des chemises.
Quand un client se présente, il achète <u>au plus</u> un pantalon et une chemises.

1. La probabilité pour qu'un client achète un pantalon est 0,2. La probabilité pour qu'un client achète la chemise quand il a acheté le pantalon est 0,7 et la probabilité qu'il achète la chemise quand il n'a pas acheté le pantalon est 0,1.

a) On note P l'événement « un client achète le pantalon».
On note C l'événement « un client achète la chemise».
Construire un arbre de probabilité décrivant la situation.

b) Montrer que la probabilité de l'événement P∩C est égale à 0,14.

c) Calculer la probabilité de l'événement C.

d) Calculer la probabilité pour qu'un client achète le pantalon quand il a acheté la chemise.

2. Le pantalon est vendue 125 DT et la chemise 45DT.

a) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs les dépenses d'un client
Vérifier que l'ensemble des valeurs prises par X est {0, 45 , 125 , 170 }. Déterminer ainsi la loi de probabilité de X

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3. On rappelle que la probabilité pour qu'un client achète l'ensemble pantalon et chemise est 0,14.
On choisit trois clients au hasard. On suppose que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à un tirage successif avec remise.
Quelle est la probabilité qu'un seul client ait acheté un ensemble pantalon et chemise?

<u>EXERCICE N° 5</u>: (4 points)

1. Résoudre l'équation différentielle : (E) $9y'' + \pi^2 y = 0$

2. On désigne par *f* la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un plan muni d'un repère orthonormé, passe par le point $P\left(1,-\sqrt{2}\right)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Déterminer *f*.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel *x*, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left[\dfrac{\pi}{3}(x+2)\right]$

4. Calculer la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $[-2,-1]$

Correction

Solution-Exercice 1

1) b) 2) c) 3) b)

Solution-Exercice 2

1- $f(1) = -1$

$f'(1) = pente\ de\ D = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-5+1}{-1-1} = 2$

2- $f'(x) = a + b\frac{\frac{1}{x}x - lnx}{x^2} = a + b\frac{1-lnx}{x^2}$

3- $f(1) = -1 \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$ donc $f'(x) = -1 + b\frac{1-lnx}{x^2}$ comme $f'(1) = 2$ alors $-1 + b = 2 \Leftrightarrow$ $\boxed{b = 3}$

4- a) $\lim_{0^+} f = -\infty$, $(O, \vec{j}): x = 0$ est une asymptote verticale à (C)

b) $\lim_{+\infty}[f(x) + x] = \lim_{+\infty} 3\frac{lnx}{x} = 0$ donc $\Delta: y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

5- $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) + x|\, dx$ or $f(x) + x = 3\frac{lnx}{x} \geq 0\ sur\ [1, e]$ donc $\mathcal{A} = 3\int_1^e \frac{lnx}{x} dx = 3\int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{lnx}_{u}\, dx =$

$3\left[\frac{1}{2}(lnx)^2\right]_1^e = \frac{3}{2}[(lnx)^2]_1^e = \frac{3}{2}(1-0) = \boxed{\frac{3}{2}\ (u.a)}$

Solution-Exercice 3

1- $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx$

Soit $u(x) = (1-x)^{n+1} \quad \longrightarrow \quad u'(x) = (n+1)(-1)(1-x)^n$

$v'(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad v(x) = e^x$

$I_{n+1} = \underbrace{[(1-x)^{n+1}e^x]_0^1}_{-1} + (n+1)\underbrace{\int_0^1 (1-x)^n e^x dx}_{I_n} = (n+1)I_n - 1$

2- a) pour tout $x \in [0,1]$ c.à.d. $0 \leq x \leq 1$ on a $1 - x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $(1-x)^n \geq 0$ comme $e^x > 0$ alors $(1-x)^n e^x \geq 0$, or $x \mapsto (1-x)^n e^x$ est continue sur [0,1] alors $\int_0^1 (1-x)^n e^x dx = I_n \geq 0$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x dx - \int_0^1 (1-x)^n e^x dx = \int_0^1 (1-x)^n e^x (1 - x - 1) dx =$ $\int_0^1 (1-x)^n e^x (-x) dx$

Or $(1-x)^n e^x \geq 0$ et $-x \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $x \mapsto (1-x)^n e^x(-x)$ est continue sur [0,1] alors $I_{n+1} - I_n \leq 0$ d'où I_n est décroissante

c) I_n est décroissante et minorée par 0 alors I_n est convergente

3- a) $x \in [0,1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow e^x \leq e \Rightarrow (1-x)^n e^x \leq (1-x)^n e$ puisque $(1-x)^n \geq 0$

b) $x \mapsto (1-x)^n e^x$ et $x \mapsto (1-x)^n e$ sont continues sur [0,1] alors $\int_0^1 (1-x)^n e^x\, dx \leq$ $\int_0^1 (1-x)^n e\, dx$

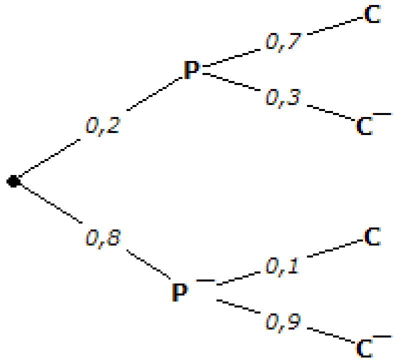
or $\int_0^1 (1-x)^n e\, dx = e\int_0^1 (1-x)^n\, dx = -e\int_0^1 \underbrace{(-1)}_{u'} \Big(\underbrace{1-x}_{u}\Big)^n dx = -e\left[\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 =$ $-e\left(0 - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{e}{n+1}$ d'où $I_n \leq \frac{e}{n+1}$

c) on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ et $\lim \frac{e}{n+1} = 0$ alors $\lim I_n = 0$

Solution-Exercice 4

1- a) $p(P) = 0{,}2$; $p_P(C) = 0{,}7$; $p_{\bar{P}}(C) = 0{,}1$



b) $p(P \cap C) = p(P) \times p_P(C) = 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}14$

c) $p(C) = p(P \cap C) + p(\bar{P}) \times p_{\bar{P}}(C) = 0{,}14 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}22$

d) $p_C(P) = \frac{p(P\cap C)}{p(C)} = \frac{0{,}14}{0{,}22} = \frac{7}{11} = 0{,}636$

2- a) $X(E) = \{0{,}45{,}125{,}170\}$

x_i	0	45	125	170
$p(X = x_i)$	0,72	0,08	0,06	0,14

$p(X = 0) = p(\bar{P} \cap \bar{C}) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$

$p(X = 45) = p(C \cap \bar{P}) = 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}08$

$p(X = 125) = p(P \cap \bar{C}) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$

$p(X = 170) = p(P \cap C) = 0{,}14$

b) $E(X) = 0 \times 0{,}72 + 45 \times 0{,}08 + 125 \times 0{,}06 + 170 \times 0{,}14 = 34{,}9$

3- il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres n = 3 et p = 0,14

soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de clients qui ont acheté un ensemble pantalon et chemise

donc la probabilité qu'un seul client ait acheté un ensemble pantalon et chemise est

$p(Y = 1) = C_3^1(0{,}14)^1(1 - 0{,}14)^2 = 3 \times 0{,}14 \times (0{,}86)^2 = 0{,}31$

Solution-Exercice 5

1- (E) $9y'' + \pi^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 y = 0$ donc $y = A\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$; $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

2- D'après les données de cette question on conclut que $f(1) = -\sqrt{2}$ et $f'(1) = 0$

Or f solution de (E) alors $f(x) = A\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

D'autre part $f'(x) = \frac{\pi}{3}A\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{\pi}{3}B\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

$$\begin{cases} f(1) = -\sqrt{2} \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\sin\frac{\pi}{3} + B\cos\frac{\pi}{3} = -\sqrt{2} \\ \frac{\pi}{3}A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B = -\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}A - \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}A + B = -2\sqrt{2} \quad (1) \\ A - \sqrt{3}B = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow A = \sqrt{3}B$ qu'on remplace dans (1) ce qui donne $4B = -2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$ d'où $\boxed{A = -\frac{\sqrt{6}}{2}}$

D'où $\boxed{f(x) = -\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}$

3- $f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) = r\cos\left(\frac{\pi}{3}x - \varphi\right)$ $\left(a = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ b = -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} cos\varphi = \dfrac{a}{r} = -\dfrac{1}{2} \\ sin\varphi = \dfrac{b}{r} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \varphi \equiv \frac{4\pi}{3}_{[2\pi]} \equiv -\frac{2\pi}{3}_{[2\pi]}$$

D'où $f(x) = \sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$

4- $\bar{f} = \frac{1}{-1+2}\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \sqrt{2}\int_{-2}^{-1} cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]dx = \sqrt{2}\frac{3}{\pi}\left[sin\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]\right]_{-2}^{-1} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right) = \frac{3\sqrt{6}}{2\pi}$