

ENONCE

Exercice 1

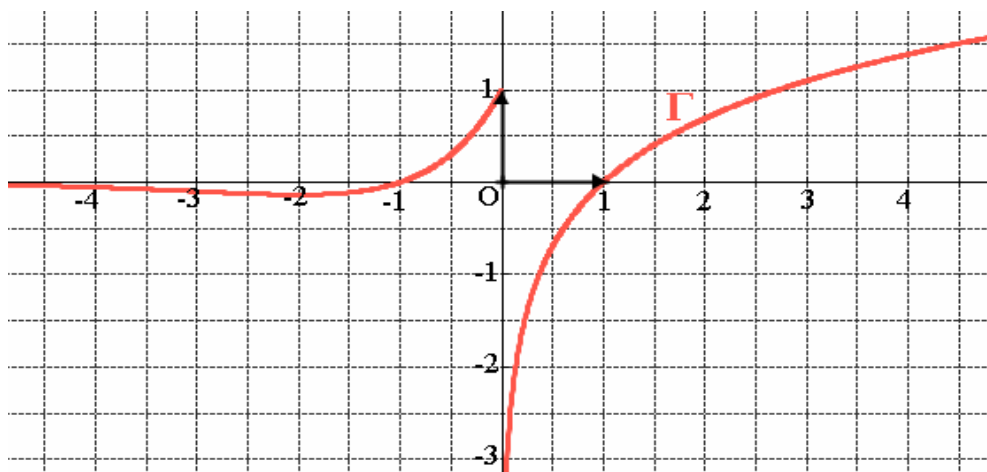
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne les points $A(1,0,1), B(-1,1,0), C(2,1,0)$ et $I_\alpha(\alpha, -\alpha, \alpha)$ où α est un réel.

- 1) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
- 2) En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.
- 3) En déduire que l'équation cartésienne de P est $y + z - 1 = 0$.
- 4) En déduire que les points A, B, C et I_α ne sont pas coplanaires.
- 5) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCI_\alpha$ est indépendant de α .
- 6) Soit S_α la sphère de centre I_α et tangente au plan P au point H_α .
- a) Déterminer les coordonnées de H_α .
- b) Soit Δ l'ensemble des points H_α lorsque α décrit l'ensemble \mathbb{R} . Déterminer la nature de Δ .

Exercice 2

La courbe Γ ci-dessous représente la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* . On sait que $f(0) = -1$ et on désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f .

- 1) Par lecture graphique déterminer :
 - a) Le signe de f''
 - b) Les points d'inflexion de \mathcal{C} .
- 2) La fonction f' est définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln(x) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
 - a) Sans expliciter $f''(x)$, dresser le tableau de variation de f' .
 - b) Calculer $f'(e)$ et en déduire le signe de f'
- 3) a) Montrer que la fonction : $x \xrightarrow{h} \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{3}{4}x^2$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction : $x \xrightarrow{k} x \ln(x) - x$
- b) Montrer que pour tout réel x on a $\int_0^x te^t dt = (x-1)e^x + 1$
- c) En déduire l'expression explicite de f
- 4) Dresser le tableau de variation de f
- 5) Etudier les branches infinies de \mathcal{C}
- 6) Tracer \mathcal{C} et ses tangentes en leurs points d'inflexion.



Exercice 3

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \int_0^{U_n} \frac{dx}{3 + \sin(x)} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n > 0$

2) Montrer que pour tout réel x , $\frac{1}{3 + \sin(x)} \leq \frac{1}{2}$.

3) En déduire que pour tout entier naturel n , $0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{\ln(x)}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère

orthogonal.

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$

4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. Interpréter.

5) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}$.

a) Etudier le sens de variation de g

b) En déduire le signe de g

6) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = g(x) e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

b) En déduire le tableau de variation de f

7) Tracer \mathcal{C} .

CORRIGE

Exercice 1

1) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires donc les points A , B et C ne sont pas alignés donc ils définissent un plan unique P .

3) On sait que le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de P donc l'équation de P est $-3y - 3z + d = 0$ or le point $A(1, 0, 1)$ appartient à P donc $-3 + d = 0$ donc $d = 3$ d'où $P : y + z - 1 = 0$.

4) On a $-\alpha + \alpha - 1 = -1 \neq 0$ donc $I_\alpha \notin P$ donc les points A , B , C et I_α ne sont pas coplanaires.

5) Soit V le volume du tétraèdre $ABC I_\alpha$ alors $V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI_\alpha}|$ or $\overrightarrow{AI_\alpha} \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ -\alpha \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$ donc $V = \frac{1}{6} |3\alpha - 3\alpha + 3|$

d'où $V = \frac{1}{2}$

6) a) $H_\alpha(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de I_α sur $P \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{H_\alpha I_\alpha} \text{ et } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires} \\ H_\alpha \in P \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha - x = 0 \\ -\alpha - y = -3t \\ \alpha - z = -3t \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + 3t \\ z = \alpha + 3t \\ -\alpha + 3t + \alpha + 3t - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha + \frac{1}{2} \\ z = \alpha + \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow H_\alpha\left(\alpha, -\alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right)$$

b) $M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow$ il existe un réel α tel que $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{2} - \alpha \\ z = \frac{1}{2} + \alpha \end{cases}$ donc Δ est la droite passant par le point $D\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

1) a)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	-	+

b) Les points d'abscisses respectives -1 et 1 sont deux points d'inflexion de \mathcal{C}

2) a)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	-	+
$f'(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	0	-1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f' = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f' = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x) - 1) = +\infty.$$

b)

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

3) a) La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ [et $h'(x) = 2\frac{1}{2}x\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x} - \frac{3}{4}2x = x\ln(x) - x = k(x)$ donc h est une primitive de k sur $]0, +\infty[$.

b) On pose $\begin{cases} U'(t) = e^t \\ V(t) = t \end{cases}$ alors $\begin{cases} U(t) = e^t \\ V'(t) = 1 \end{cases}$ d'où $\int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1$

c) La fonction $x \mapsto (x-1)e^x + 1 + a$ où a est un réel constant est une primitive de la restriction de f' à $]-\infty, 0[$.

La fonction $h + b$ où b est un réel constant est une primitive de la restriction de f' à $]0, +\infty[$.

Or f est continue en 0 puisqu'elle est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ donc :

$$\lim_{0^+} f = \lim_{0^+} f = f(0) = -1 \text{ donc } b = a + 1 - 1 = -1 \text{ donc } a = b = -1.$$

Conclusion : $f(x) = \begin{cases} (x-1)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{3}{4}x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4)

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{e^2+4}{4}$	$+\infty$

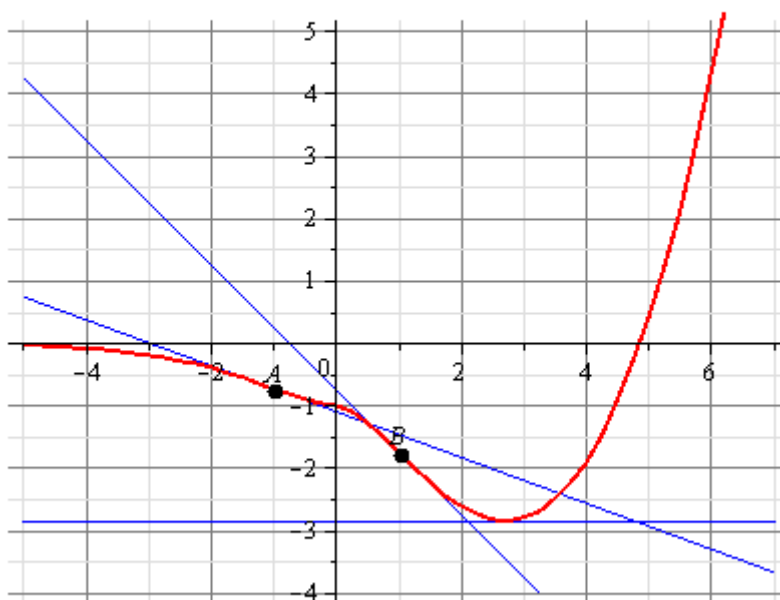
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

5) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{2} \ln(x) - \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$ donc \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

6) Soit $A\left(-1, -\frac{2}{e}\right)$ et $B\left(1, -\frac{7}{4}\right)$ les points d'inflexion de \mathcal{C} . On a $f'(-1) = -\frac{1}{e}$ et $f'(1) = -1$.

— Courbe de la fonction f
— Tangentes à la courbe de f



Exercice 3

1) ● On a $U_0 > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$

● Supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{3 + \sin(x)}$ est continue et strictement positive sur l'intervalle $[0, U_n]$ donc $\int_0^{U_n} \frac{dx}{3 + \sin(x)} > 0$

d'où $U_{n+1} > 0$.

Conclusion : pour tout entier naturel n , $U_n > 0$.

2) On sait que pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $2 \leq 3 + \sin(x) \leq 4$ donc $\frac{1}{3 + \sin(x)} \leq \frac{1}{2}$

3) On a $\begin{cases} \text{pour tout réel } x > 0, \frac{1}{3 + \sin(x)} \leq \frac{1}{2} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, U_n > 0 \end{cases}$ donc $\int_0^{U_n} \frac{dx}{3 + \sin(x)} \leq \int_0^{U_n} \frac{1}{2} dx$ donc $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

4) a) ● On a $0 < U_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

• Supposons que $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et montrons que $0 < U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On sait que $0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $0 < U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) On a $\begin{cases} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \end{cases}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

Exercice 4

1) Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$ donc $\lim_{0^+} f = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$

3) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \left(\frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}} \right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}} \right) = +\infty$
 $= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ où on a posé $X = \frac{\ln(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Interprétation : \mathcal{C} admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

5) a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ [et $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \ln(x) - \frac{1}{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln(x) - 2}{x^2}$

x	0	e^2	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
Sens de variation de g		décroissante	croissante

b) $\frac{e^2 - 1}{e^2}$ est le minimum de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$ [donc g est strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$

6) a) Soit $x > 0$ alors $f'(x) = e^{\frac{\ln(x)}{x}} + x \left(-\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{1}{x} \frac{1}{x} \right) e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \right) = g(x) e^{\frac{\ln(x)}{x}}$

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$+\infty$

7)

