## EXERCICE N°1(5,5points)

Soit *f* la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{2e^x-1}{e^x+1}$ et soit (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 $cm$ )

1) a) Calculer $\lim_{+\infty} f \ et \ \lim_{-\infty} f$ . Interpréter les résultats trouvés.
   b) Dresser le tableau de variation de *f* sur IR.

2) a) Résoudre dans IR l'équation $f(x) = 0$.

   b) Tracer (C) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (vérifier que **f(0)=0,5** et **f(ln2)=1** )

3) a) Montrer que *f* est une bijection de IR sur un intervalle I à préciser.

   b) Tracer (C') courbe représentative de $f^{-1}$ dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ .

4) a) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ I.

   b) En déduire alors la valeur de l'intégrale : $\int_{0,5}^{1} \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) dx.$ (on peut remarquer que $f(x) = 3\frac{e^x}{e^x+1} - 1$)

## EXERCICE N°2(4points)

La durée de vie d'une machine suit une loi exponentielle X de paramètre $\lambda = 0{,}04$ .

1) a) Quelle est la probabilité que cette machine dure exactement 10 ans ?

   b) Quelle est la probabilité que cette machine dure entre 5 et 12 ans ?

   c) Quelle est la probabilité que cette machine dure plus que 15 ans ?

2) On sait que cette machine a déjà vécue 10 ans, quelle est la probabilité qu'elle dure moins que cinq ans supplémentaires ?

3) Déterminer la fonction F de répartition de X et la tracer dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ telle que $\|\vec{\jmath}\| = 5\,cm \ \ et \ \ \|\vec{\imath}\| = 0{,}5\,cm$ .

## EXERCICE N°3(4points)

Dans l'annexe à rendre, les courbes **(C)** et **(C')** désignent les représentations graphiques d'une fonction $f$ définie, continue et dérivable sur IR et de sa fonction dérivée $f'$ dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que **(C)** est la courbe de $f$ et que **(C')** est celle de $f'$.
   b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par **(C')** , l'axe des abscisses et les droites $x = 0 \ et \ x = 4$ . (partie hachurée).

2) On suppose que la fonction $f$ tracée dans l'annexe est définie sur IR par :

$f(x) = \ln(e^x - x)$ .

   a) Calculer $\lim_{+\infty} f \quad et \quad \lim_{-\infty} f$ .

   b) Vérifier que $f(x) = x + \ln(1 - \frac{x}{e^x})$ , déduire que la droite $\Delta: y = x$ est une asymptote à **(C)** au voisinage de $(+\infty)$.

   c) Vérifier que **(C)** est au dessous de $\Delta$ sur $[0, +\infty[$, puis tracer $\Delta$ .

3) Soit $(U_n)$ la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \ ; n \geq 0 \end{cases}$

   a) Montrer que $U_n > 0 \ pour \ tout \ \ n \in IN$.

   b) Déduire que la suite $(U_n)$ est décroissante.

   c) Tracer dans l'annexe à rendre les cinq premiers termes de la suite( $U_n$) .

   d) Conjoncture sur la limite de la suite ($U_n$ ).

## EXERCICE N°4(3,5points)

On considère l'équation différentielle : $(E): y'(x) - 2y(x) = 4x + 12$ .

1) Résoudre l'équation différentielle : $(E_0); y'(x) - 2y(x) = 0$ .
2) Déterminer les réels $a \ et \ b$ telle que la fonction : $x \longmapsto g(x) = ax + b$ soit une solution de l'équation $(E)$.
3) a) Montrer que $f$ est une solution de $(E)$ si et seulement si $(f - g)$ est une solution de $(E_0)$ .
   b) Déduire alors toutes les solutions de $(E)$ .

## EXERCICE N°5(3points)

Le capital Y (en milliers de dinars) d'une équipe sportive en fonction du nombre de ses abonnés X (en milliers) est donné dans le tableau suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'abonnés X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Capital Y | 1 | 6 | 30 | 81 | 170 | 300 |

On pose $Z = \ln Y$ :

**(Noter Bien : on donnera toutes les valeurs arrondis à $10^{-2}$ près)**

1) a) Recopier le tableau suivant sur votre copie puis le compléter:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Z | | | | | 5,14 | |

b) Calculer les moyennes arithmétiques et les écarts types de X et de Z.

c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z.

d) Déterminer une équation de la droite de régression **D** de Z en X.

e) En déduire que $Y \cong 0{,}58\ (3{,}1)^X$

2) Déduire une valeur approchée du capital de cette équipe si le nombre de ses abonnés dépasse 10000.

**Nom & prénom :** ..............................................................................................

***ANNEXE A RENDRE***

..............................................................................................

## Correction du devoir de synthèse n°3

**Niveau :** 4 ème Science expérimentales
**Epreuve :** Mathématiques

## EXERCICE N°1 :

**1).a).** $\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(2-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})}$ =2.La droite d'équation y=2 est une asymptote à **(C)** au voisinage de +∞.

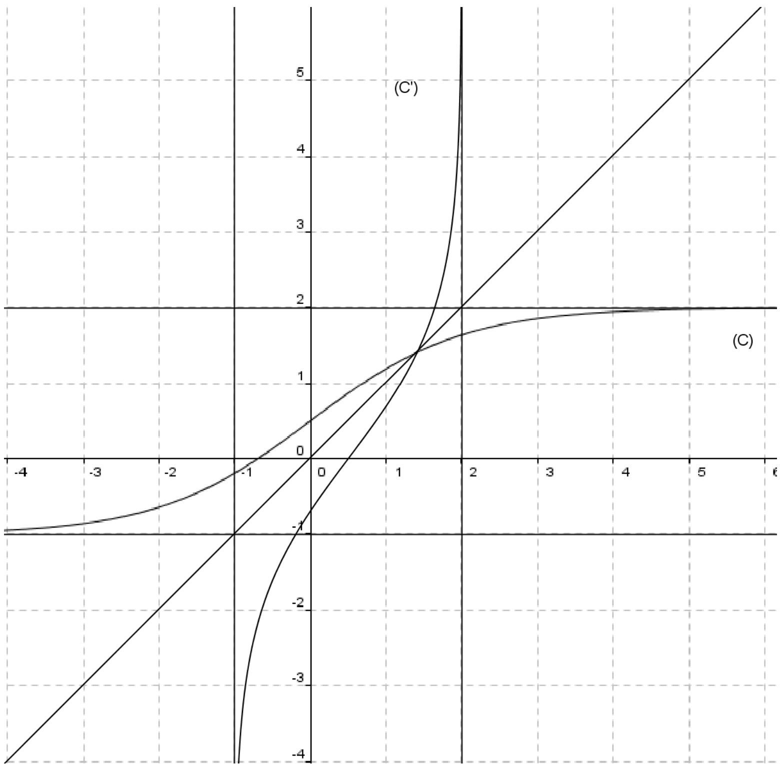
. $\lim_{-\infty} f = \frac{-1}{1}$=-1 .La droite d'équation y=-1 est une asymptote à **(C)** au voisinage de -∞.

**b).** $f'(x)=\frac{2e^x(e^x+1)-(2e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{3e^x}{(e^x+1)^2} > 0.$

| X | -∞ | | +∞ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | |
| f | -1 | ↗ | 2 |

**2).a).** f(x)=0 signifie $2e^x-1=0$ signifie $e^x=\frac{1}{2}$ signifie $x=\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$.

**b).**



**3).a)**.*On a f est continue et strictement croissante sur IR donc f est une bijection de IR sur f(IR) =]-1 ;2[ = I.*

**b).**(C')=$S_D$(C) *où D est la droite d'équation y=x.*

**4).a).** $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in ]-1\,;2[ \end{cases}$ *signifie***).** $\begin{cases} f(y) = x \\ y \in IR \end{cases}$

*f(y)=x signifie* $\frac{2e^y-1}{e^y+1}$ *=x signifie 2*$e^y$*-1=x*$e^y$*+x signifie* $e^y=\frac{x+1}{2-x}$ *signifie y=ln* $(\frac{x+1}{2-x})$

*d' où* $f^{-1}(x)$*= ln* $(\frac{x+1}{2-x})$ $\forall$ *x* $\in$*]-1 ;2[*

**b).** J=$\int_{0.5}^{1} ln\,(\frac{x+1}{2-x})\;dx = \int_{0.5}^{1} f^{-1}(x)\;dx$ *est l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations :x=0.5 et x=1*

*Par raison de symétrie par rapport à la droite D :y=x on a* J *est l'aire du rectangle de dimensions ln(2) et 1 privée de l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations :x=0et x=ln (2)*

*d'où* J *=(1xln (2))-* $\int_0^{\ln(2)} f(x)\;dx$ *=ln(2)-* $\int_0^{\ln 2} \left(3\frac{e^x}{e^x+1} - 1\right) dx$

*=ln2-*$[3\ln(e^x+1) - x]_0^{ln2}$ *=5 ln(2) – 3 ln(3)=ln (32)-ln (27) =* $\ln(\frac{32}{27})$ *u.a.*

## <u>EXERCICE N°2 :</u>

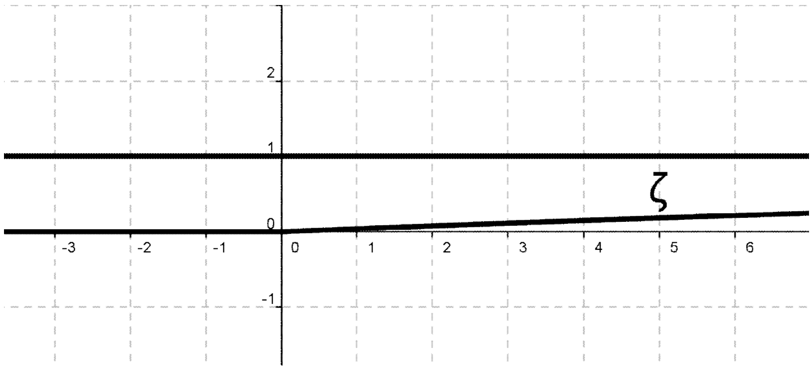
**1).a).***p (X=10 ) = 0.*

**b).** *p(5*$\leq X \leq 12$ *) =* $e^{-5x0.04}$*-*$e^{-12x0.04}$ *=*$e^{-0.2}$*-*$e^{-0.48}$.

**c).** *p(X≥15) =*$e^{-15x0.04}$*=*$e^{-0.6}$.

**2).***p((X*$\leq$ 15)*/( X≥10)) =*$\frac{p((X\leq15)\cap(X\geq10))}{p(X\geq10)} = \frac{p(10\leq X\leq15)}{p(X\geq10)} = \frac{e^{-0.4}-e^{-0.6}}{e^{-0.4}}$.

**3).***F(x)=*$\begin{cases} 0\; si\; x < 0 \\ p(0 \leq X \leq x) si\; x \geq 0 \end{cases}$ *signifie F(x)=*$\begin{cases} 0\; si\; x < 0 \\ 1 - e^{-0.04x}\; si\; x \geq 0 \end{cases}$




## EXERCICE N°3:

***1).a).****Si* ***(C)*** *est la courbe de f ' alors f '(x) ≥0 donc f est croissante sur IR ce qui est absurde d'où* ***(C)****est la courbe de f et* ***(C')*** *est la courbe de f '.*

***b).****L''aire du domaine du plan limité par la courbe (C') , l'axe des abscisses et les droites d'équations :x=0 et x= 4 est* $\int_0^4 f'(x)dx$ *= f(4) – f(0)=3,925 u.a.*

***2).a).*** $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ; $\lim_{-\infty} f = +\infty$ .

***b).i).****f(x) = ln* $(e^x(1-\frac{x}{e^x}))$*=ln*$(e^x)$*+ ln* $((1-\frac{x}{e^x}))$*=x+ ln* $((1-\frac{x}{e^x}))$*.*

***ii).*** $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln((1-\frac{x}{e^x}))=0$ *signifie Δ :y=x est une asymptote à* ***(C)*** *au voisinage de +∞.*

***c).***$\forall\, x \in [0;+\infty[$ *on a* $1-\frac{x}{e^x} \le 1$ *signifie* $\ln((1-\frac{x}{e^x}))\le \ln(1)$ *signifie*

*f(x)-x≤ 0 d'où* ***(C)*** *est en dessous de Δ sur* $[0;+\infty[$ .

***3).a).****pour n=0 on a* $u_0=2>0$ *(vrai)*

*.Supposons que* $u_n > 0$ *et montrons que* $u_{n+1} > 0$

*On a* $u_{n+1}=f(u_n)$ *et* $u_n > 0$ *alors* $u_{n+1} > 0$ *(car f(x)> 0∀ x >0)*

*Conclusion :* $u_n > 0\ \forall\, n>0$*.*

***b).****On a f(x)-x< 0 ∀ x >0 et* $u_n > 0$ *donc* $f(u_n) - u_n < 0$

*Signifie $u_{n+1} < u_n$ d'où $(u_n)$ est décroissante.*

**c).***voir annexe.*

**d).** *$(u_n)$ est convergente vers 0.*

## EXERCICE N°4:

**1).** *y'-2y=0 signifie y'=2y signifie y=k $e^{2x}$ (k∈IR)*

**2).***g(x)=a x+b signifie g'(x)=a*

*g est une solution de (E) signifie g'(x) – 2 g(x) = 4x + 12 signifie a -2(a x+b)=4x+12*

*signifie -2ax+a-2b =4x+12 signifie -2a=4 et a-2b=12 signifie a=-2 et b=-7 d'où . . g(x)=-2x-7.*

**3).a).***f est une solution de (E) signifie f'(x)-2f(x)=4x+12=g'(x)-2g(x)*

*Signifie (f-g)'-2(f-g)=0 signifie (f-g) est une solution de ($E_0$)*

**b).f** *est une solution de (E) signifie(f-g) est une solution de ($E_0$) signifie f(x)-g(x)= k $e^{2x}$ (k∈IR) signifie f(x)=g(x)+k $e^{2x}$ (k∈IR) signifie f(x)=-2x-7+ k $e^{2x}$.*

## EXERCICE N°5:

**1).a).**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Z | 0 | 1 ,79 | 3,40 | 4,39 | 5,14 | 5,70 |

**b).**$\overline{X}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i$=3,5. $\overline{Z}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} z_i \simeq$3,4

**c).***r=* $\frac{cov(X,Z)}{\sigma_X\sigma_Z} \simeq$0,98

**d).***D :Z=a X+b avec a =* $\frac{cov(X,Z)}{v(X)} \simeq$1,13 *et b =* $\overline{Z}$- a $\overline{X} \simeq$-0,55

**e).***On a Z = 1,13 X -0,55 signifie ln (Y) = 1,13 X -0,55 signifie*

*Y* = $e^{1,13\,X\,-0,55}$ =$e^{1,13\,X}$ . $e^{-0,55}$ *or ln(3,1) ≃1,13 et* $e^{-0,55}$ *≃0,58*

*d'où Y≃0,58.* $e^{Xln(3,1)}$ *≃0,58.* $e^{ln(3,1)^{X}}$ *≃0,58.* $(3,1)^{X}$

***2).****X≥10 alors Y≥0,58.* $(3,1)^{10}$ *donc ce capital dépasse 47538440dinars*