

DEVOIR DE CONTROLE N°3

Durée : 2heures

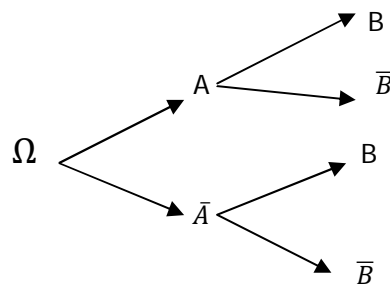
Niveau : 4^{ème} Sciences expérimentales
Epreuve : Mathématiques

Exercice n°1 : (4points)

On donne l'arbre de probabilité ci-contre

On connaît que $p(A)=0.2$; $p_A(B) = 0.5$

et $p_{\bar{A}}(B) = 0.6$.



1). Compléter cet arbre

2). Calculer $p(A \cup B)$; $p(B)$ et $p_B(A)$

3). A et B sont-ils indépendants ?

Exercice n°2 : (6points)

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 20% des filles et 30% des garçons fument.

1). On choisit un élève au hasard. On note A l'événement < l'élève choisi fume > et F l'événement < l'élève choisi est une fille > et $p(A)$ la probabilité de A

Quelle est la probabilité que :

- Cet élève soit un garçon ?
- Cet élève soit une fille qui fume ?
- Cet élève soit un garçon qui fume ?

2). Montrer que $p(A)=0,24$

3). L'enquête permet de savoir que :

- . Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- . Parmi les élèves non fumeurs, la moitié ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement < l'élève choisi a des parents fumeurs >

a). Calculer les probabilités des événements suivant :

C : < l'élève choisi est fumeur et ses parents sont des fumeurs >

D : < l'élève choisi n'est pas un fumeur et ses parents sont des fumeurs >

b). Calculer $p(B)$.

4). a). Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

b). Calculer la probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Exercice n°3 : (4points)

Soit n un entier naturel On considère la fonction f_n définie sur $[0 ; 1]$ par :
 $f_0(x) = \ln(x)$ et $f_n(x) = x^n \ln(x)$ si $n > 0$ et on pose $I_n = \int_1^e f_n(x) dx \forall n \in \mathbb{N}$

1). Calculer I_0, I_1 et I_2

2). Etudier la monotonie de (I_n)

3). a). Exprimer I_n en fonction de n .

b). En déduire la limite de (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

c). la suite (I_n) est elle majorée ? Justifier.

Exercice n°4 : (6points)

1). On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^{-x}$

a). Dresser le tableau de variation de g sur \mathbb{R}

b). Tracer C_g , la courbe de g , dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

c). Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations : $x=0 ; x=1 ; y=0$ et la courbe C_g .

2). on considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

a). Démontrer que $e^x \neq x \forall x \in \mathbb{R}$

b). Montrer que f est définie et dérivable sur \mathbb{R}

c). Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R}

d). Tracer C_f , la courbe de f , dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.

BON TRAVAIL

Correction du devoir de controle

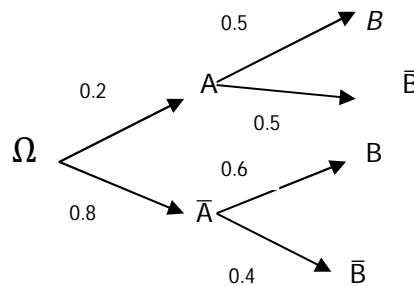
n°3

Niveau : 4^{ème} Sciences experimentales
Epreuve : Mathématiques

Exercice n°1 :

1). Voir l'arbre ci-contre

2). i). $p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.4 \times 0.8 = 0.68.$



ii). $p(B) = p_A(B) \cdot p(A) + p_{\bar{A}}(B) \cdot p(\bar{A}) = 0.1 + 0.48 = 0.58$

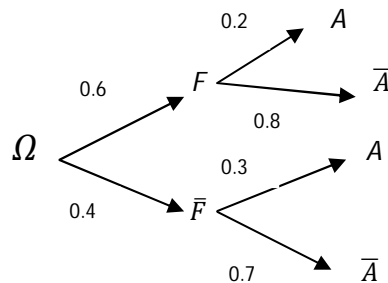
iii). $p_B(A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{0.1}{0.58} = \frac{10}{58}$

3). On a $p(A) \cdot p(B) \neq p(A \cap B)$ signifie A et B ne sont pas indépendants.

Exercice n°2 :

1). Cette situation est donnée par

l'arbre ci-contre :



a). $p_1 = 1 - p(F) = 1 - 0.6 = 0.4$

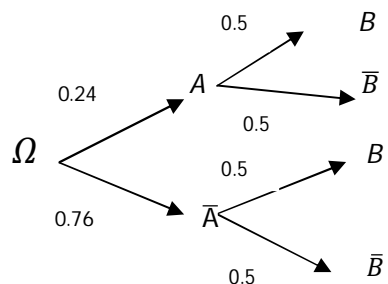
b). $p_2 = p(A \cap F) = p_F(A) \cdot p(F) = 0.2 \times 0.6 = 0.12.$

c). $p_3 = p(A \cap \bar{F}) = p_{\bar{F}}(A) \cdot p(\bar{F}) = 0.3 \times 0.4 = 0.12.$

2). $p(A) = p_F(A) \cdot p(F) + p_{\bar{F}}(A) \cdot p(\bar{F}) = 0.12 + 0.12 = 0.24.$

1). Cette situation est donnée par

l'arbre ci-contre :



a). i). $p(C) = p(A \cap B) = p_A(B) \cdot p(A) = 0.12.$

ii). $p(D) = p(\bar{A} \cap B) = p_{\bar{A}}(B) \cdot p(\bar{A}) = 0.38$.

b). $p(B) = p_A(B) \cdot p(A) + p_{\bar{A}}(B) \cdot p(\bar{A}) = 0.12 + 0.38 = 0.5$.

4). a). $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.12}{0.5} = 0.24$.

b). $p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{0.24 \times 0.5}{0.5} = 0.24$.

Exercice n°3 :

1). $I_0 = \int_1^e f_0(x) dx = \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x] = \boxed{1}$

$I_1 = \int_1^e f_1(x) dx = \int_1^e x \ln(x) dx$. on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$I_1 = [\frac{x^2}{2} \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} [\frac{x^2}{2}]_1^e = \boxed{\frac{e^2 + 1}{4}}$

$I_2 = \int_1^e f_2(x) dx = \int_1^e x^2 \ln(x) dx$. on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

$I_2 = [\frac{x^3}{3} \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} [\frac{x^3}{3}]_1^e = \boxed{\frac{2e^2 + 1}{9}}$

2). a). $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x^n \ln(x) (x - 1) dx \geq 0$ (car $x^n \geq 0$ et $\ln(x) \geq 0$ et $(x - 1) \geq 0 \forall x \in [1; e]$)

d'où $I_{n+1} \geq I_n$ donc (I_n) est croissante.

3). $I_n = \int_1^e f_n(x) dx = \int_1^e x^n \ln(x) dx$. on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^n \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$I_2 = [\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^{n+1}}{(n+1)x} dx = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_1^e = \frac{n e^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$

b). On pose $x = n+1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) \frac{e^x}{(x)^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) \frac{1}{(x)^2} = +\infty$.

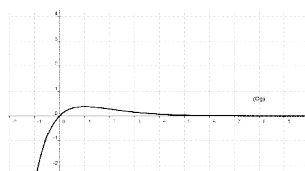
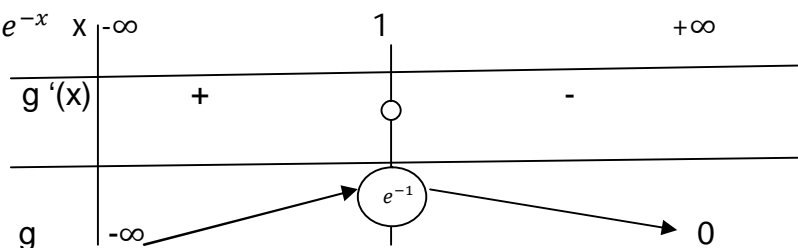
c). Supposons que (I_n) est majorée, on aura (I_n) est convergente car (I_n) est croissante ce qui est absurde car $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ d'où (I_n) n'est pas majorée.

Exercice n°4 :

1). a). $g'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x) e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$



b).

c). $A = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x e^{-x} dx$. on pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$A = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + (-e^{-1} + 1) = 1 - 2e^{-1}$ u.a.

2). a). Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x - x$

On a $g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	\circ	+
g			

On a 1 est un minimum global de g donc $g(x) \geq 1$ d'où $g(x) > 0$

Signifie $e^x - x > 0$ signifie $e^x > x, \forall x \in \mathbb{R}$, d'où $e^x \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

b). On a $e^x \neq x, \forall x \in \mathbb{R}$, signifie $e^x - x \neq 0$ signifie f est définie sur \mathbb{R}

. On a la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R}

la fonction $x \mapsto e^x - x$ est dérivable sur \mathbb{R} et $e^x - x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d'où f est dérivable sur \mathbb{R}

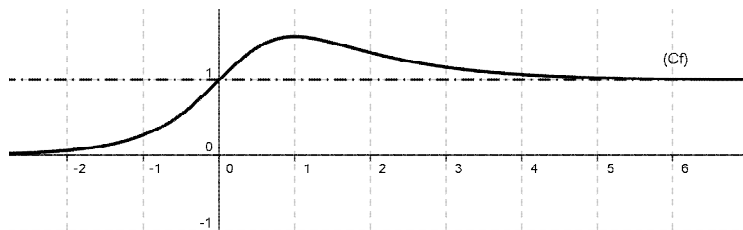
c). $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$

On a $f(1) = \frac{e}{e-1}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

d).

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	\circ	-
f	0	$\frac{e}{e-1}$	1



BON TRAVAIL