Devoir de contrôle n° 3

Classe : 4 ème Sc exp$_1$

Mathématiques

Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par **Vraie** ou **Faux** sans justification.

P$_1$: La fonction $x \mapsto \ln(\ln x)$ est définie sur $]0,+\infty[$.

P$_2$: La fonction $x \mapsto x\ln\left(\frac{x}{e}\right)$ est une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.

P$_3$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}=\frac{3}{2}$.

.

Exercice n°2 : (7 pts)

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$ et $B(0,1,1)$.

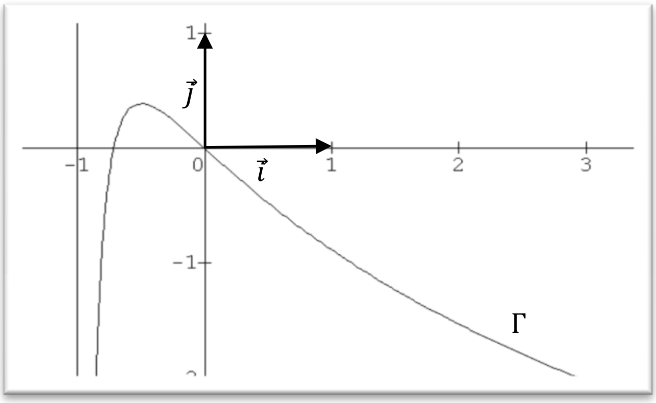
1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.
   $b/$ En déduire que les points O, A et B déterminent un plan P dont on donnera une équation cartésienne.
   $c/$ Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et passant par A. Montrer que B appartient à $\mathscr{C}$.
   $d/$ Soit G le point de coordonnées $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. Montrer que G appartient à $\mathscr{C}$.
2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\alpha \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, $\alpha\in IR$.

   Vérifier que Δ est l'axe de $\mathscr{C}$.
3) Pour tout réel m, on considère l'ensemble S_m des points $M(x,y\,z)$ tels que :

   $$x^2+y^2+z^2-2mx+2my-2mz-2=0.$$

   $a/$ Montrer que, pour tout $m\in IR$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m .
   $b/$ Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit IR.
   $c/$ Vérifier que, pour tout $m\in IR,\ A\in S_m$.
   $d/$ Déterminer l'intersection de S_m et le plan P.
4) Soit Q le plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-4\sqrt{3}=0$.
   $a/$ Vérifier que Q est perpendiculaire à P.
   $b/$ Montrer que $S_{\sqrt{2}}$ est tangente à Q.
   $c/$ On désigne par H le point de contact de $S_{\sqrt{2}}$ et Q. Calculer la distance OH.

Exercice n°3 : *(10 pts)*



A- Soit la fonction φ définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1).$$

La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique de φ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Etablir le tableau de variations de φ.
2) On désigne par α l'abscisse du point d'intersection de Γ avec l'axe $(O,\vec{\imath})$ autre que l'origine du repère.

   Utiliser la courbe Γ pour déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

B- Soif f la fonction définie sur $D=]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) $a/$ Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

   $b/$ Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$.

2) Montrer que : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^3}$ pour tout $x\in D$.

3) On considère l'intégrale : $I=\int_\alpha^0 \varphi(x)dx$.

   $a/$ Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

   $b/$ En remarquant que : $\varphi(x)=x^3f'(x)$, montrer, en utilisant une intégration par parties que : $I=\dfrac{-\alpha^2}{2(\alpha+1)}-3\int_\alpha^0 \ln(x+1)dx$.

   $c/$ Vérifier que la fonction : $x\mapsto (x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de la fonction : $x\mapsto \ln(x+1)$.

   $d/$ Montrer alors que : $\int_\alpha^0 \ln(x+1)dx=\dfrac{\alpha}{2}$, puis que : $I=\dfrac{-4\alpha^2-3\alpha}{2(\alpha+1)}$.

4) $a/$ Etablir le tableau de variations de f.

   $b/$ Montrer que : $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. Puis donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant $\alpha\simeq -0,7$.

   $c/$ Tracer $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

CORRECTION

EXERCICE1

$P_1 \quad faux$

$P_2 \ \ vrai$

$P_3 \ \ vrai$

EXERCICE2

1)a)$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n} \neq \vec{0}$ $donc\ O, A\ et\ B\ ne\ sont\ pas\ alignes\ et\ alors\ determinent\ un\ plan\ P\ de\ vecteur$

$normal\ \vec{n} \ \Rightarrow P: x - y + z + a = 0\ et\ que\ A \in P \Rightarrow 1 - 1 + 0 + a = 0$

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow P: x - y + z = 0$

b)$C: x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}^2$; $on\ a : 0 + 1 + 1 = 2\ vrai\ donc\ \ B \in C$

$on\ a : (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{-1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{6}{3} = 2\ \ donc\ G \in C$

2)$un\ vecteur\ directeur\ de\ \Delta\ est\ \vec{n}\ \ et$

$O \ \in \Delta\ \ et\ O\ est\ le\ centre\ de\ C\ passant\ par\ A, B\ et\ G\ \ or\ G \in P$

$donc\ \Delta \perp\ P\ en\ O\ \ \Rightarrow \Delta\ est\ l'axe\ de\ C$

3)a)$S_m: (x - m)^2 + (y + m)^2 + (z - m)^2 = (\sqrt{3m^2 + 2}^2$

$donc\ \ c'est\ une\ sphere\ de\ centre\ \ le\ point$

$I_m(m, -m, m)\ et\ de\ rayon\ R_m = \sqrt{3m^2 + 2}$

b)$on\ pose\ x = m\ \ alors\ tous\ les\ points\ I_m\ verifient$

$x = -y = z\ \ c'est\ une\ droite\ D: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

d)$on\ a : 1^2 + 1^2 + 0^2 - 2m \times 1 + 2m \times 1 + 2m \times 0 - 2 = 0$ donc A$\in S_m$

d)$h = d(I_m; P) = \frac{|m+m+m|}{\sqrt{3m^2}} = \sqrt{3} < R_m\ \ donc\ P\ coupe\ S_m\ suivant\ un\ cercle$

REMARQUE

La question ne demande pas la caracterisation de l'intersection mais je vai la caracteriser

soit J le centre du cercle donc J est la projection orthogonale de I_m *sur P* et de rayon r

$\Rightarrow \overrightarrow{I_mJ}$ *et* $\vec{n}$ *sont colineaires et*

$$J \in P \ d'ou \begin{cases} x_J - m = k \\ y_J + m = -k \\ z_J - m = k \end{cases} ;(k+m) - (-k-m) + (k+m) = 0$$

$k = -m \ \Rightarrow x_J = 0;\ y_J = 0\ et\ z_J = 0 \ \Rightarrow I = O$

$r = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{3m^2 + 2 - 3} = \sqrt{3m^2 - 1}$

$$4)a)\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ un\ vecteur\ normal\ de\ Q\ \ on\ a : \vec{n}.\vec{u} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$$

$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow P \perp Q$

b)$I_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ \Rightarrow d(I_{\sqrt{2}}\,;Q) = \frac{|\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-4\sqrt{3}|}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$= \ R_{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S_{\sqrt{2}}\ est\ tangente$ à Q

$c)$ *on a :* $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{I_{\sqrt{2}}H}$ *sont colineaires et* $H \in Q$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H - \sqrt{2} = k \\ y_H + \sqrt{2} = 2k \\ z_H - \sqrt{2} = k \end{cases} \ et\ (k+\sqrt{2}) + 2(2k - \sqrt{2}) + (k+\sqrt{2}) - 4\sqrt{3} = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}; \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}; \frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}\right) \Rightarrow OH = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2})^2 + (\frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{2})^2 + (\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{2})^2}$$

EXERCICE3

A)1)

x	-1	α		½		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$			+	0	-			
$\varphi(x)$				½				
	$-\infty$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2)$on\ a\ \ \varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq 0\ et\ \varphi(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-1, \alpha] \cup [0, +\infty[$

B)$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

1)a)$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\ \ et\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty\ \ et\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{lny}{(y-1)^2} = -\infty$

b)$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{y\to +\infty} \frac{lny}{(y-1)^2} = 0$

2)$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\times x^2 - 2xln(1+x)}{x^4} = \frac{\varphi(x)}{x^3}\ \ \forall x\epsilon]-1,0[\cup]0,+\infty[$

3)$a)I\ est\ l'aire\ de\ la\ partie\ entre\ la\ courbe\ (\Gamma)\ \ l'axe\ des\ ordonnes$

$les\ droites\ x = \alpha\ et\ x = 0$

b)$I = \int_\alpha^0 x^3 f'(x)dx\, ; u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2\ \ , V' = f'(x) \Rightarrow v = f(x) \Rightarrow$

$I = [x^3 f(x)]_\alpha^0 - 3\int_\alpha^0 x^2 f(x)\, dx = -\alpha^3 f(\alpha) - 3\int_\alpha^0 \ln(x+1)\, dx \quad (\ voir\ \ B)plus\ haut$

$on\ a\ f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}\quad or\ \varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\ln(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\quad \Rightarrow$

$f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}\quad \Rightarrow I = -\frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)} - 3\int_\alpha^0 \ln(x+1)\, dx$ (1111)

c)$[(x+1)\ln(x+1) - x]' = \ln(x+1)$

d)$\int_\alpha^0 \ln(x+1)\, dx = [(x+1)\ln(x+1) - x]_\alpha^0 = -(\alpha+1)\ln(\alpha+1) + \alpha =$

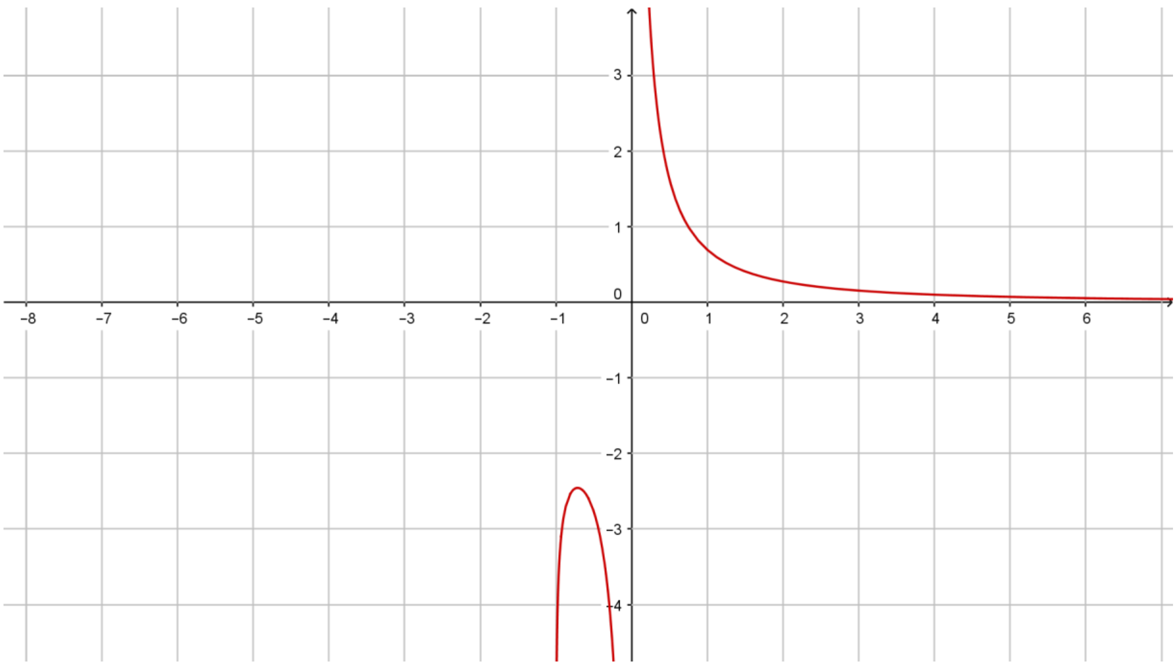
$-(\alpha+1)\frac{\alpha}{2(\alpha+1)} + \alpha = \frac{\alpha}{2}$

Donc $I = -\frac{\alpha^2}{2(\alpha+1)} - 3\frac{\alpha}{2} = \frac{-4\alpha^2 - 3\alpha}{2(\alpha+1)}$

4)a)

X	-1		α		0		+∞
$\varphi(x)$		-	0	+		-	
x^3		-		-	0	+	
f'(x)		+	0	-	‖	-	
f(x)	-∞	↗	f(α)	↘	-∞ ‖ +∞	↘	0

b)voir(1111) 3)b)



Guesmi.B