Epreuve : Mathématiques *Devoir de contrôle n° 3* *Durée : 2 heures*

Classe : 4SC3

Exercice n°1 :(14 points)

1ière partie :(7points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n ln(x+1)$. (C_n) est la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.

1) On pose $\forall\, x \in\,]-1,+\infty[\, ,\ \varphi_n(x) = n\, ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$
   a) Montrer que φ_n est croissante sur $]-1,+\infty[$.
   b) Calculer $\varphi_n(0)$ et déduire le signe de $\varphi_n(x)$.
   c) Soit ≥ 2 . Discuter , suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .
2) a) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, $f_n(x) = 1$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique $\alpha_n > 1$.
   b) Montrer que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente .
3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)\, u_n = ln(2) - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\, dx$.
   b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{n+2} \leq (n+1)u_n - ln2 \leq -\frac{1}{2(n+2)}$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, u_n$.

2ième partie :(7 points)

Soit les fonctions f_1 et f_2 définies sur$]-1,+\infty[$ par $f_1(x) = x\, ln(x+1)$ et $f_2(x) = x^2 ln(x+1)$. Dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$, soit (C_1) la courbe de f_1 et(C_2) la courbe de f_2 .

1) a) Etudier les variations de f_1 et f_2 puis la position de (C_1) et (C_2) et les Construire .
   b) Calculer $I = \int_0^1 f_1(x)dx$ et $J = \int_0^1 f_2(x)dx$. Déduire l'aire de la partie du plan limitée par (C_1) et (C_2) .
3) Soit $\forall\, x > -1$, $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$. On a représenté , dans l'annexe et dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les courbes de h et de sa dérivée h' .
   [redacted]) Reconnaitre la courbe de h . Calculer l'aire du domaine limité par la courbe de h' , $(O,\vec{\imath})$ et les droites : $x = 0$ et $= 1$.

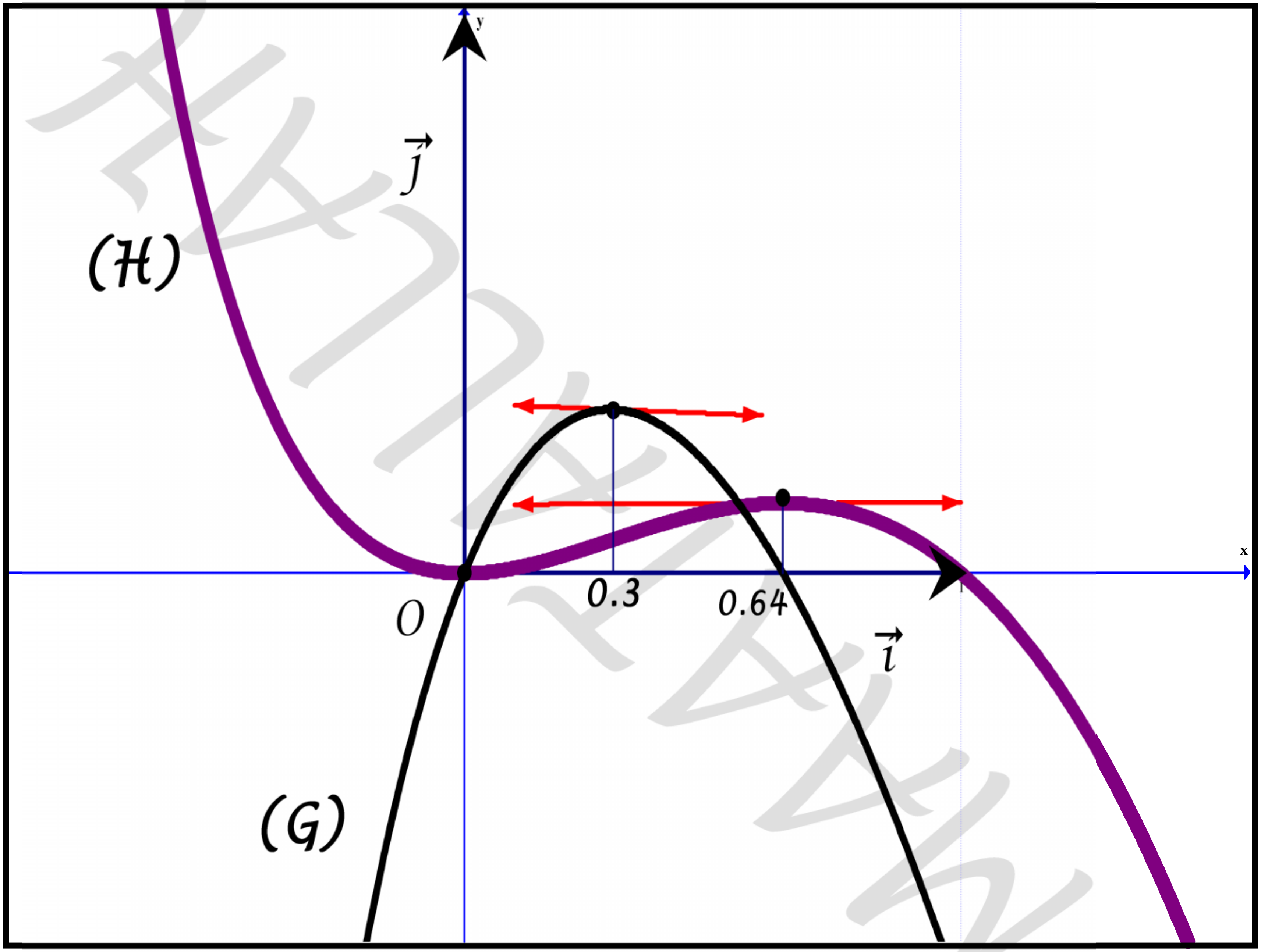
[redacted]

Exercice n°2 :(6points)

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé , on considère les points $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ et $C(0,1,1)$ et l'ensemble $S = \{ M(x,y,z) \in \xi \ / \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0 \}$.

1) Montrer que S est une sphère . Préciser son centre I et son rayon R .
2) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Déduire une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$.
   b) Montrer que O , A , B et C forment un tétraèdre puis calculer son volume .
   c) Montrer que P et S se coupent selon un cercle dont on précisera le centre H et le rayon r .
3) Soit Q le plan d'équation : $x - y + \sqrt{2}\, z + 2 - \sqrt{2} = 0$.
   b) Montrer que Q est tangent à S en un point J qu'on déterminera .
   c) Donner une équation du plan Q' tangent à S et strictement parallèle à .
4) a) Montrer que les plans médiateurs de $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ se rencontrent au point $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

[redacted]


(H)
(G)
O
0.3
0.64
x
y

CORRECTION(proposéé par le prof :Guesmi.B)

EXERCICE1

1)$a)\forall x > -1\,;\ \varphi_n{}'(x) = n\frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{nx+n+1}{(x+1)^2}$

$pour\ x > -1 \Rightarrow nx + n + 1 > 1\ \Rightarrow \varphi'_n(x) > 0\ \Rightarrow \varphi_n(x) est\ croissante\ \forall x > -1$

b)$\varphi_n(0) = 0\ \ pour -1 < x \leq 0 \Rightarrow \varphi_n(x) \leq 0\ et\ pour\ x \geq 0 \Rightarrow \varphi_n(x) \geq 0$

c)n≥2

$f_n{}'(x) = x^{n-1}\varphi_n(x)\ \ ; pour\ n = 2p + 1 \Rightarrow le\ signe\ f'_n(x)\ est\ le\ meme\ que\ \varphi_n(x)$

Donc le tableau suivant

x	-1		0		$+\infty$
$f_n{}'(x)$		-	0	+	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

(Tableau (1))

Si n=2p

Donc le tableau suivant

X	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		-	0	+	
$\varphi_n(x)$		-	0	+	
$f'_n(x)$		+	0	+	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

(Tableau (2))

2)a)

$dapres\ les\ deux\ tableaux\ sur\ [0,+\infty[\ ,f_n(x) est\ continue\ et\ strictement\ croissante$

$donc\ l'equation f_n(x)=1\ admet\ exactement\ une\ seule\ solution\ \alpha_n;$

$f_n(1)=ln2\ \ supposons\ que\ \alpha_n\leq 1\ \ on\ a\ f_n(1)\neq 1\ \ ;\Rightarrow \alpha_n<1\ et\ f_n\ croissante$

$\Rightarrow 1=f_n(\alpha_n)<ln2=0{,}69\Rightarrow 1<0{,}69\ faux\ donc\ \alpha_n>1$

b)$f_n(\alpha_n)=1\Leftrightarrow \alpha_n^n\ln(\alpha_n+1)=1\ ;supposons\ que\ \alpha_n\ n'est\ pas\ convergente$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty\ (\alpha_n>1)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}f_n(\alpha_n)=+\infty=1\ absurde\ donc\ (\alpha_n) convergente$

3)$a)u_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)\,dx\ \ ;u'=x^n\Rightarrow u=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ ;v=\ln(x+1)\Rightarrow v'=\frac{1}{x+1}\ donc$

$u_n=\left[\frac{x^{n+1}\ln(x+1)}{n+1}\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx\Rightarrow (n+1)u_n=ln2-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx\ CQFD$

3)b)$on\ a:0\leq\frac{x^{n+1}}{x+1}\leq\frac{1}{x+1}\Rightarrow -\frac{1}{n+2}\leq 0\leq (n+1)u_n\ or\ x^{n+2}\leq x^{n+1}\leq x^n$

$pour\ 0\leq x\leq 1\ \Rightarrow -x^n\leq -x^{n+1}\leq -x^{n+2}\ \ en\ passant\ aux\ integrales$

$on\ obtient\ le\ resultat$

En passant aux limiltes on a :$\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n-ln2=0\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n=ln2$

DEUXIEME PARTIE

On va aborder la deuxieme partie independamment de la partie (I)

Mais en fait la paritie (II) utilise les resultats de (I)

1)$f'_1(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\ \ \Rightarrow\ f''_1(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}\forall x>-1$

x	-1	0	$+\infty$
$f''_1(x)$		+	
$f'_1(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

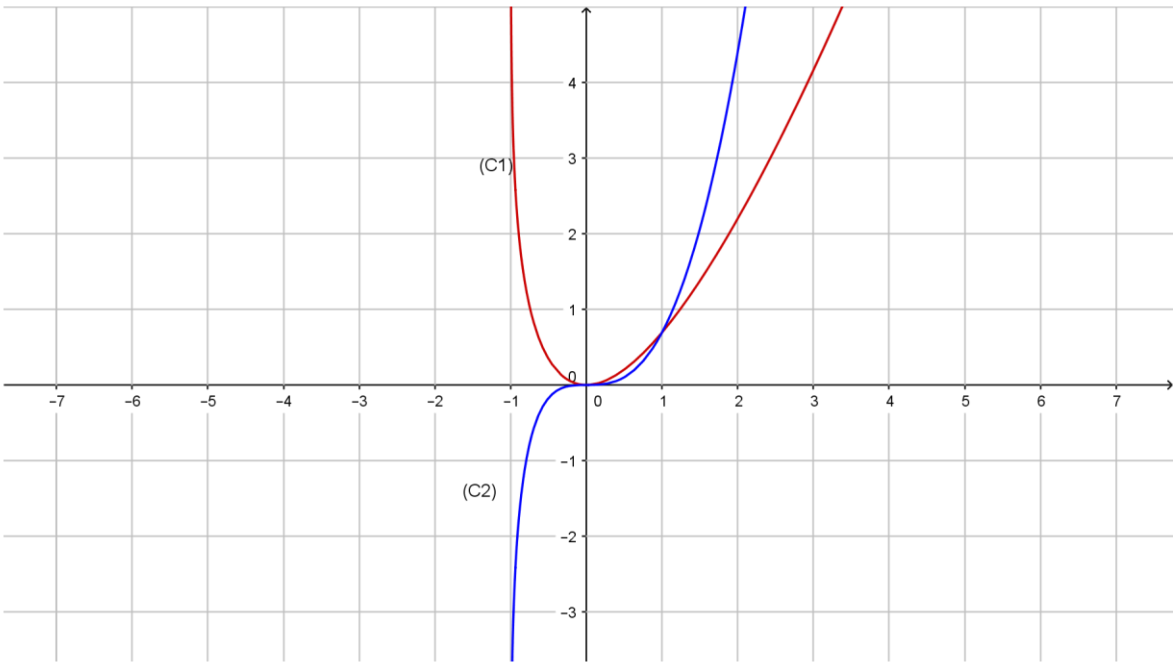
i)$f'_2(x)=2x\ln(x+1)+\frac{x^2}{x+1}=2f_1(x)+\frac{x^2}{x+1}\geq 0\ pour\ x>-1$

x	-1			$+\infty$
$f'_2(x)$		$+$	$+$	
$f_2(x)$	$-\infty$	0		$+\infty$

$soit\ g(x) = f_2(x) - f_1(x) = (x^2 - x)\ln(x+1)\ \ \forall x > -1$

x	-1		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	-	0	+	
Ln(x+1)		-	0	+		+	
g (x)		-	0	-	0	+	

donc C_1 au dessus de C_2 sur]-1, 1]   et au dessous sur [1 ;+∞[



b)$soit\ A\ l'aire\ de\ la\ partie\ limiteé\ par\ C_1\ et\ C_2\ ; A = \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)|\, dx =$

$\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))dx = I - J\ (vu\ la\ position\ des\ deux\ courbes\ )$

$I = ?\ ; u' = x \Rightarrow u = \frac{x^2}{2}\ ; V = \ln(x+1) \Rightarrow V' = \frac{1}{x+1} \Rightarrow$

$I = \left[\frac{x^2 \ln(x+1)}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{ln2}{2} - \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{1}{4} + ln2\right.$

$J = \frac{ln2}{3} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx\ ; \frac{x^3}{x+1} = \frac{x^3+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1}$

$donc\ J = \frac{2}{3}ln2 - \frac{5}{18}$

(si j'ai pas commis d'erreurs de calculs)

$donc\ A = -\frac{1}{4} + ln2 - \frac{2}{3}ln2 + \frac{5}{18} = \frac{1}{3}ln2 + \frac{2}{9}$

3)$(H)est\ la\ courbe\ de\ f_1(x) - f_2(x) = h(x)puisque\ d\ 'apres\ la\ position\ de$

$(C_1)et\ (C_2)sur\ ]-1{,}1]\ \ h(x) \geq 0$

$B = \int_0^1 h'(x)dx = I - J$

REMARQUE

On peut retrouver les questions pour

$\boldsymbol{f_1(x) on\ prend\ n = 1\ \ et\ pour\ f_2(x)}$;

$\boldsymbol{n = 2\ \ et\ on\ utilise\ les\ resultats\ de\ la\ premiere\ partie}$

EXERCICE2

1)$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1\ \ donc$

$S\ est\ la\ sphere\ de\ centre\ I(1{,}1{,}1) et\ de\ rayon\ R = 1$

2)a)$soit\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}\ \ soit\ M(x,y,z) \in P = (ABC) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow P: x + y + z - 2 = 0$

b)$\Delta = \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow O\ ; A\ ; B\ et\ C\ ne\ sont\ pas\ coplanaires$

$\Rightarrow OABC\ est\ un\ tetraedre$

$le\ volume\ V = \frac{1}{6}|\Delta| = \frac{1}{3}$

c)$soit\ D = d(I\ ; P) = \frac{|1+1+1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} <$
$1\ donc\ S\ et\ P\ se\ coupent\ suivant\ un\ cercle\ de\ centre\ L\ projete\ orthogonal$

$de\ I\ sur\ P\ et\ de\ rayon\ \ r = \sqrt{R^2 - D^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \ cherchons\ les\ coordones\ de$

$J(a, b; c); on\ a:\ \overrightarrow{IL}\ et\ \vec{n}\ sont\ colineaires\ et$

$L \in$

$P \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = -k \\ b - 1 = -k\ et\ (1-k) + (1-k) + (1-k) - 2 = 0 \\ c - 1 = -k \end{cases}$

$\Rightarrow k = \frac{1}{3}\ \ et\ donc\ L(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

3)a)$d(I, Q) = \frac{|1-1+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1+2}} = 1 =$

$R\ donc\ Q\ est\ tangent$ à$S\ en\ un\ point\ J(a; b; c); soit\ \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; on\ a:$

$\overrightarrow{IJ}\ et\ \vec{u}\ sont\ colineaires\ et\ J \in Q\ \ tout\ calcul\ fait\ J(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$

4)a)P_1 $plan\ mediateur\ de\ [AB] \Rightarrow P_1 : x + y + k =$
$0\ et\ N\ milieu\ de\ [OA]\ est\ un\ point\ de\ ce\ plan$

$N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow$

$P_1: x + y - 1 = 0\ \left(car\ \overrightarrow{OA}\ est\ un\ vecteur\ normal\ \text{à}\ P_1\right)$

$on\ montre\ de\ la\ meme\ facon\ que\ la\ plan$

$P_2: x + z - 1 = 0\ est\ le\ plan\ mediateur\ de\ [OB]$

$P_3: y + z - 1 = 0\ plan\ mediateur\ de\ [OC]$

$on\ verifie\ bien\ que\ E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \in P_1 \cap P_2 \cap P_3$