Devoir de synthèse n°3

(Bac Science1 et 2) ***Durée: 3h***

Exercice n°1 : **(4 points)**

Choisir l'unique bonne réponse et avec justification

1) La solution f de l'équation différentielle : y' - 2y = -2 et vérifiant f(0) =2 est :
a) $f(x) = 2\,e^{2x}$ b) $f(x) = e^{2x} + 1$ c) $f(x) = e^{x} + 1$

2) La fonction $g(x) = e^{-x} + 1$ est une solution de l'équation différentielle :

a) y'+y =1 b) y'-y=1 c) y'+ y = 0

3) Le nombre des gagnants dans un jeu suit une loi binomiale B (20 ; 0,3) alors le nombre moyen des gagnants égal à :

a) 20 b) 10 c) 6

4) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx$ égal à

a) e+1 b) ln(e+1) c) $\ln(\frac{1+e}{2})$

Exercice n°2: **(4 points)**

Dans cet exercice tous les résultas seront donner à 10^{-3} prés

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays, en millions d'habitants.

Année	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6
Population en millions (y_i)	74,523	85,151	97,338	110,449	124,842	140,879

A) 1) Calculer le coefficient de la série (X,Y).Interpréter le résultat.
2) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.
3) Donner le nombre des habitants de ce pays en 2015.

B) En 2015 on a noté une population de 158,729 millions d'habitants. On décide alors de faire un ajustement exponentiel. On poseZ = ln(Y)
1) Calculer le coefficient de corrélation de la série (X,Z)

2) Déterminer l'équation de la droite de régression de *Z* en *X* .

3) En déduire une expression de la population *y* en millions d'habitants en fonction du rang *x* de l'année sous la forme $y= \alpha\, e^{\beta x}$

4) Utiliser cet ajustement pour estimer la population en 2015.

<u>Exercice n°3 :</u> (5 points)

Un magasin vend des ordinateurs de deux types hp et Toshiba.
Dans le stock du magasin il y en a 60% du type hp.
*Parmi les ordinateurs hp, 5 % sont défectueux.
*Parmi les ordinateurs Toshiba 8% sont défectueux.
On note les événements suivants : T« Ordinateur Toshiba » et par D « Ordinateur défectueux ».
1) Modéliser les données de l'exercice avec un arbre de probabilité.
2) Un client achète un ordinateur. Calculer la probabilité de ces événements ;
   a) Le client achète un ordinateur Toshiba et non défectueux.
   b) le client achète un ordinateur défectueux.
3) Sachant que l'ordinateur est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit hp.
4) Cinq clients entrent dans le magasin, chacun choisit un ordinateur indépendamment des autres.
Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux choisissent des ordinateurs Toshiba et non défectueux.
5) La durée de vie d'un ordinateur en année suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$
   a) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie supérieure à 4 ans.
   b) Quelle est la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à 36 mois.
   c) Un ordinateur est en marche depuis 3 ans, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 5 ans ?

<u>Exercice n°4 :</u> (7 points)

A) Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par g(x) = $e^x(x-2)-1$ et C_g sa courbe représentative dans l'annexe

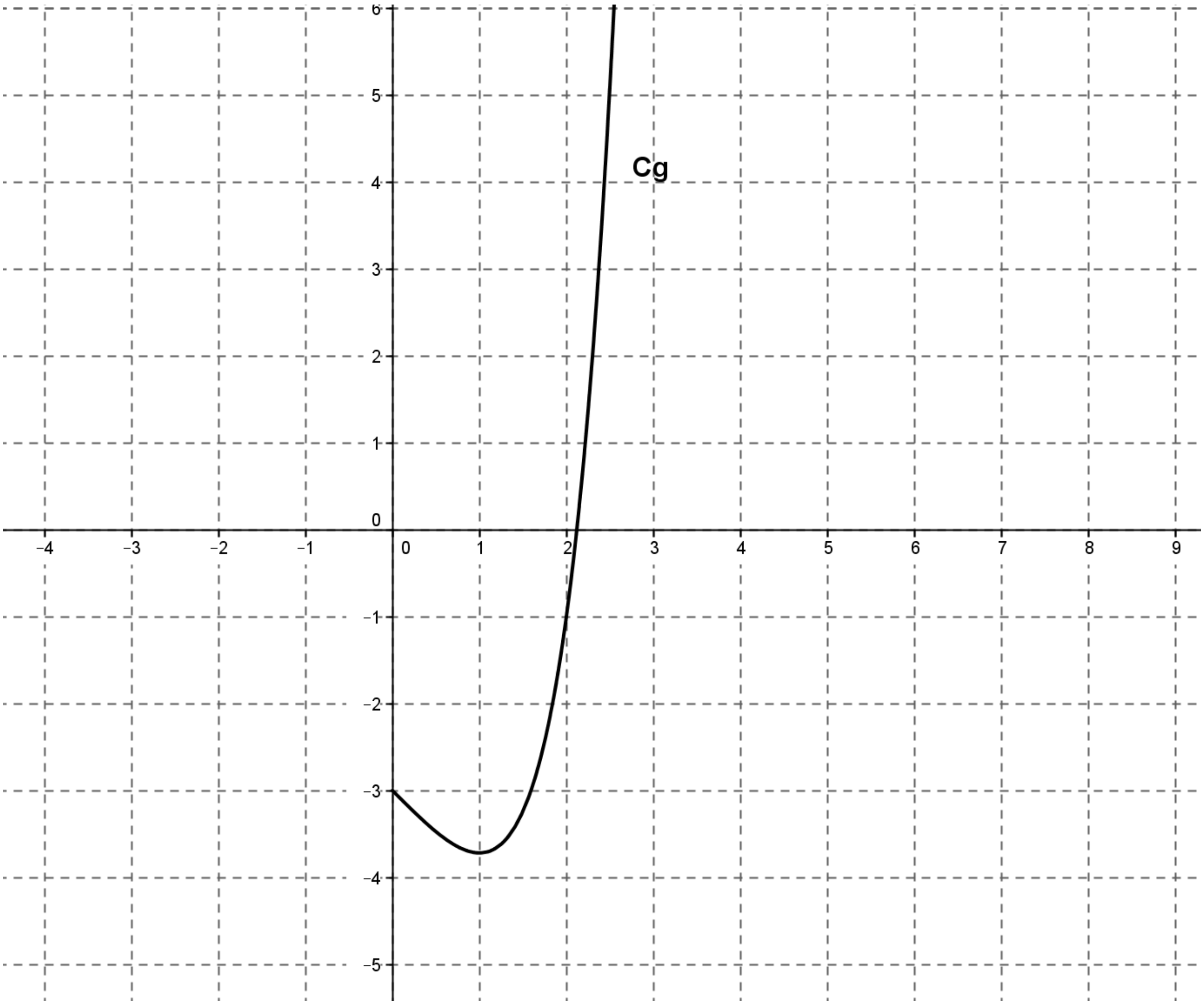
1) Montrer que g'(x) = $(x-1)e^x$
2) Dresser le tableau de variation de g .
3) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet $[1,+\infty[$ dans une unique solution α puis vérifier que $2{,}1< \alpha <2{,}2$
4) Dresser graphiquement le tableau de signe de g(x) .
5) a)Montrer que g est une solution de l'équation différentielle (E) : $y'-y=e^x+1$
   b) Calculer l'aire de la partie du plan A limitée par les courbes de g et de g' et les droites d'équations x=0 et x = 1

B) Soit la fonction f définie sue $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+e^x}{x+e^x}$

1) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+e^x)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
2) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$
3) Construire sur l'annexe C_f .
4) Calculer l'aire de la partie du plan B limitée par C_f, l'axe des abscisses te les droites d'équation x= 0 et x=1
5) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,\alpha]$ dans un intervalle J que l'on déterminera.
   b) Construire dans le même repère la courbe de f^{-1}.
   c) Calculer l'aire de la partie de la partie du plan limitée par C_f ,$C_{f^{-1}}$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnés

<u>Bon travail</u>

Nom et prénom :..



CORRECTION(proposée par le prof :Guesmi.B)

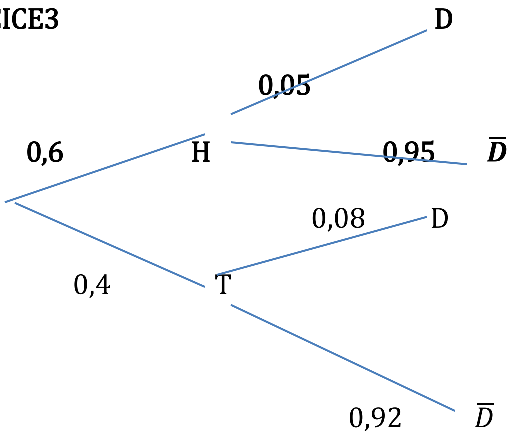
EXERCICE1

1)b 2)a 3)c 4)c

A justifier a titre d'exercice (contacter moi si vous avez des problemes)

EXERCICE3

1)



T :toshiba H :hp

2) $a)\ \ P(T \cap \overline{D}) = 0{,}4 \times 0{,}92 = 0{,}368 = P(T) \times P_T(\overline{D})$

b)$P(D) = P(T \cap D) + P(H \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}08 + 0{,}6 \times 0{,}05 = 0{,}062$

3)$P_D(H) = \frac{P(D \cap H)}{P(D)} = \frac{15}{31}$

4)$5\ clients\ achetent\ independamment\ l'unde\ l'autre\ chacun\ un\ ordinateur\ c'est$

$la\ meme\ chose\ \ qu'un\ client\ achete\ successivement\ 5\ ordinateurs\ donc\ c'estune$

$repitition\ d'unememe\ epreuve\ 5\ fois\ donc\ c'estune\ epreuve\ de\ Bernoulli\ de\ succes$

$p = P(T \cap \overline{D}) = 0{,}368\ \ et\ d'echec\ \overline{p} = 1 - 0{,}368 =$
$0{,}632\ on\ est\ on\ presense\ d'uneloi\ biomiale\ B(5; 0{,}368) donc$

$P(X = k) = C_5^k (0{,}368)^k (0{,}632)^{5-k}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) = 0{,}605\ \ \ (apres\ tout\ calcul)$

5)a)$P(X \geq 4) = e^{-4\lambda} = 0{,}92 \quad (f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \quad \lambda = 0{,}02$

b)$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - e^{-0{,}02\times 3} = 0{,}058$

c)$P_{(X\geq 3)}(X \leq 5) = \frac{P((X\geq 3)\cap(X\leq 5))}{P(X\geq 3)} = \frac{P(3\leq X\leq 5)}{P(X\geq 3)} = \frac{e^{-3\lambda}-e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = 1 - e^{-2\lambda} = 0{,}04$

EXERCICE2

A)1)

$r = \frac{cov(x;y)}{\sigma_x.\sigma_y}$ *on commence a calculer* $\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$ *et*

$\bar{Y} = \frac{74{,}523+85{,}151+97{,}338+110{,}449+124{,}842+140{,}879}{6} = 105{,}54$

donc $v(x) = \frac{1^2+2^2+9+16+25+36}{6} - 3{,}5^2 = 2{,}91$ *et* $v(y) = 515{,}17$

$$donc\ \sigma_x = \sqrt{2{,}91} = 1{,}71\ et\ \sigma_y = 22{,}71\ \ donc$$

$$cov(x,y) = \frac{74{,}523 + 2\times 85{,}151 + 3\times 97{,}338 + 4\times 110{,}449 + 5\times 124{,}842 + 6\times 140{,}879}{6} - 3{,}5\times 105{,}54 = 38{,}67\ \ donc$$

$r = 0{,}99$

tres forte correlation positive

2)$D_{\frac{Y}{X}}: \frac{y-\bar{y}}{x-\bar{x}} = \frac{cov(x,y)}{v(x)} \Leftrightarrow y = \frac{38{,}67}{2{,}91}(x - 3{,}5) + 105{,}53 \Leftrightarrow y = 13{,}29(x - 3{,}5) + 105{,}53$

$\Leftrightarrow y = 13{,}29x + 59$

3)*en* 2015 $x = 7 \Rightarrow y = 13{,}29 \times 7 + 59 = 152{,}03$ *milions*

B)on a calcule $r = \frac{cov(x,z)}{\sigma_x.\sigma_z}$ *calculons* z_i

y_i	74,523	85,152	97,338	110,449	124,842	140,879
$Z_i=\ln(y_i)$	4,31	4,44	4,58	4,70	4,82	4,94

1) $r = \frac{cov(x,z)}{\sigma_x\sigma_z}$

$\bar{z} = \frac{4{,}32+4{,}44+4{,}58+4{,}7+4{,}82+4{,}94}{6} = 4{,}63 \quad donc$

$cov(x;z) = \frac{4{,}32+2\times4{,}44+3\times4{,}58+4\times4{,}7+5\times4{,}82+6\times4{,}94}{6} - 4{,}63\times3{,}5 = 0{,}375 \;\; donc$

$r = \frac{0{,}375}{1{,}71\times\sigma_z} \;\; reste\ alors\ a\ calculer$

$v(z) = \frac{4{,}32^2+4{,}44^2+4{,}58^2+4{,}7^2+4{,}82^2+4{,}94^2}{6} - 4{,}63^2 = 0{,}076 \;\; donc\ \sigma_z = 0{,}275 \quad alors$

$r = \frac{0{,}375}{1{,}71\times0{,}271} = 0{,}81$

$2) D_{z/x}: \frac{z-\bar{z}}{x-\bar{x}} = \frac{0{,}375}{2{,}91} \Leftrightarrow z = 0{,}128(x-3{,}5)+4{,}63 \Leftrightarrow z = 0{,}128x+4{,}182$

$3) on\ a\ y = e^z = e^{4{,}182}e^{0{,}128x} \;\; en\ 2015 \;\; ; x = 7\ donc\ y = e^{4{,}182}e^{0{,}128\times7} \approx 160{,}45$

Proche de l'estimation considere

EXERCICE4

$A)1)\ g'(x) = e^x(x-2)+e^x = e^x(x-1)\forall x \geq 0$

2)

x	0		1		α	+∞
g '(x)		-	0	+		
g(x)	-3	↘	-e-1	↗	0	+∞

$3) g\ est\ continue\ \ et\ strictement\ croissante\ sur\ [1,+\infty[\;\; \ni 0 \;\; donc\ l'equation$

$g(x) = 0\ admet\ une\ seule\ solution\ \alpha \;\; de\ plus\ g(2{,}1)\times g(2{,}2) < 0 \;\; donc \;\; 2{,}1 < \alpha < 2{,}2$

$4) \;\; on\ a\ pour \;\; 0 < \alpha \;\Rightarrow g(x) < 0 \;\; et\ pour\ x \geq \alpha \Rightarrow g(x) \geq 0$

$5)a) on\ a : g'(x) - g(x) = e^x(x-1) - e^x(x-2) + 1 = e^x + 1 \;\; donc\ g(x) est\ solution\ de\ (E)$

$b)\ on\ a\ g(x) - g'(x) = e^x + 1 > 0 \;\; d'ou\ A = \int_0^{1(} g(x) - g'(x))\,dx = \int_0^1 (e^x+1)dx =$
$[e^x + x]_0^1 = e + 1 - 1 = e$

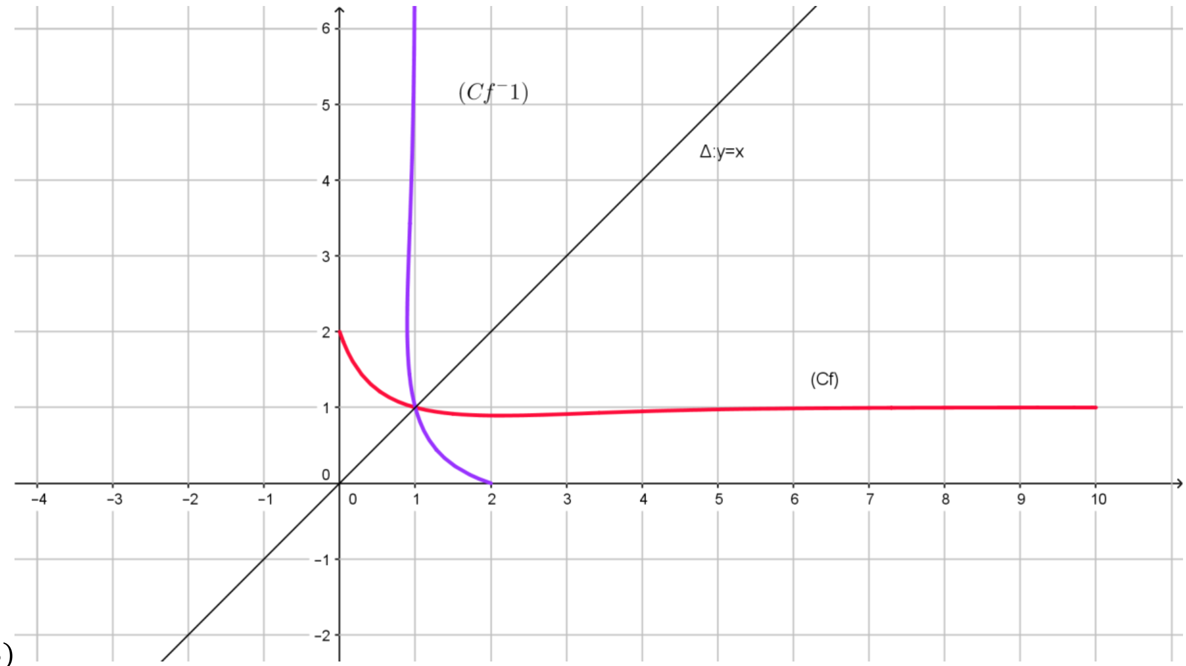
B)1)$a)\ f'(x) = \frac{e^x(x+e^x)-(e^x+1)(1+e^x)}{(x+e^x)^2} = \frac{g(x)}{(x+e^x)^2}$ $\ donc\ le\ signe\ de\ f'(x)\ est\ le\ meme\ que\ g(x)$

b)

x	0		α		+∞
f ‘(x)		-	0	+	
f(x)	1+1/e	↘	f(α)	↗	1

2)$f(\alpha) = \frac{1+e^\alpha}{\alpha+e^\alpha}$ $(1)\ \ or\ g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha(\alpha-2) = 1 \Leftrightarrow$

$e^\alpha = \frac{1}{\alpha-2}$ $\ donc\ en\ remplacant\ dans\ (1)\ \ f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$



3)

4)$B = \int_0^1 f(x)\, dx = [\ln(x+e^x)]_0^1 = \ln(1+e)$ $\quad on\ remarque\ \ que\ (x+e^x)' = 1+e^x$

$C = 2\int_0^2 \big(x - f(x)\big)dx = 2[\frac{x^2}{2}]_0^2 - 2[\ln(x+e^x]_0^2 = 4 - 2\ln(2+e^2)$